Espaces euclidiens

Feuille d'exercices

1 ★ Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \dots, a_n$ des réels deux-à-deux distincts.

1. Montrer que l'application

$$(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \longmapsto \langle \mathrm{P}, \mathrm{Q} \rangle = \sum_{j=0}^{n} \mathrm{P}(a_j)\mathrm{Q}(a_j)$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

2. Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on pose :

$$\mathrm{L}_i = \prod_{\substack{0 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} \frac{\mathrm{X} - a_j}{a_i - a_j}.$$

a. Calculer $\mathrm{L}_i(a_j)$ pour $0 \leqslant i, j \leqslant n$.

b. En déduire que $\underline{\mathrm{L}} = (\mathrm{L}_0, \dots, \mathrm{L}_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ orthonormale pour le produit scalaire de la question **1.**.

c. Déterminer les coordonnées d'un polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ dans cette base.

2 Soit E un espace euclidien de dimension n rapporté à une base orthonormale $\underline{e}$. On considère un endomorphisme f représenté en base $\underline{e}$ par une matrice A telle que $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}$ et ${}^t\mathrm{A} = \mathrm{A}$.
Démontrer que f est une projection orthogonale.

3 Soit E un espace euclidien rapporté à une base $\underline{e}$. On note A la matrice représentative du produit scalaire sur E dans la base $\underline{e}$. Justifier l'existence d'une matrice $\mathrm{P} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $\mathrm{A} = {}^t\mathrm{P}\mathrm{P}$ et en déduire que A est inversible.

4 ✎ Dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ euclidien canonique, déterminer une base orthonormale du sous-espace F engendré par les matrices

$$\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{L} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5 ★ Soit E l'ensemble des fonctions $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ continues telles que $\int_0^{+\infty} f(t)^2 \, \mathrm{d}t$ converge.

1. **a.** Montrer que si f et g sont des éléments de E, alors l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument.

b. En déduire que E est un espace vectoriel pour les lois usuelles.

2. Montrer que

$$(f, g) \longmapsto \langle f, g \rangle = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

définit un produit scalaire sur E.

3. **a.** Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_k : t \longmapsto \mathbf{e}^{-kt}$ appartient à E.

b. Calculer $\langle f_k, f_l \rangle$ pour tout $k, l \in \mathbb{N}^*$.

4. Déterminer une base orthonormale de $\mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3)$.

6 ★ Pour $\Omega = (\omega_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ orthogonale, montrer que :

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |\omega_{i,j}| \leqslant n\sqrt{n} \qquad \text{puis} \qquad \left| \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \omega_{i,j} \right| \leqslant n.$$

7 ★ Soient E un espace euclidien et F, G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrer que $(\mathrm{F} + \mathrm{G})^\perp = \mathrm{F}^\perp \cap \mathrm{G}^\perp$.

2. En déduire que $(\mathrm{F} \cap \mathrm{G})^\perp = \mathrm{F}^\perp + \mathrm{G}^\perp$.

8 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un espace euclidien E. Montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{F}^\perp \oplus \mathrm{G}^\perp$.

9 ★ Soient E un espace euclidien et f un endomorphisme de E tel que $f(x)$ est orthogonal à x pour tout $x \in \mathrm{E}$.

1. Montrer que pour tous $x, y \in \mathrm{E}$, $\langle f(x), y \rangle = -\langle x, f(y) \rangle$. On dit que f est un endomorphisme *antisymétrique*.
Indication. On pourra calculer $\langle f(x+y), x+y \rangle$.

2. Montrer que $\mathrm{Ker}\, f = (\mathrm{Im}\, f)^\perp$.

3. **a.** Montrer que 0 est la seule valeur propre éventuelle de f.

b. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

4. Soit $\underline{e}$ une famille obtenue en réunissant une base orthonormale de $\mathrm{Im}\, f$ et une base orthonormale de $\mathrm{Ker}\, f$. Justifier que $\underline{e}$ est une base orthonormale de E et déterminer la forme de la matrice de f dans cette base.

10 Sur l'ensemble $\mathrm{E} = \ell^\infty(\mathbb{R})$ des suites réelles bornées, on définit le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ par :

$$\forall u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathrm{E}, \quad \forall v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathrm{E}, \quad \langle u, v \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n v_n}{2^n}.$$

1. Vérifier que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour les lois usuelles et que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.

2. Déterminer l'orthogonal du sous-espace F des suites presque nulles (i.e. dont les termes sont nuls à partir d'un certain rang) de E. Commenter.

3. On considère le sous-espace vectoriel

$$\mathrm{G} = \{u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathrm{E} : \forall n \in \mathbb{N}, 2u_{n+3} = u_{n+2} + 2u_{n+1} - u_n\}.$$

a. Déterminer une base de G.
Indication. On pourra rechercher les suites géométriques appartenant à G et considérer l'application $\phi : (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathrm{G} \longmapsto (u_0, u_1, u_2)$.

b. En déduire une base orthonormale de G.

11 ♣ Soit E un espace euclidien.

1. Pour tout $a \in$ E, on note φ_a la forme linéaire $x \longmapsto \langle x, a\rangle$ de E et φ l'application $a \longmapsto \varphi_a$ de E dans $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \mathbb{R})$. Montrer que φ est un isomorphisme.
2. Soit f un endomorphisme de E.
   a. Montrer qu'il existe un et un seul endomorphisme $f^\star$ de E, appelé l'*adjoint* de f, tel que :
   $$\forall x, y \in \mathrm{E}, \quad \langle f(x), y\rangle = \langle x, f^\star(y)\rangle .$$
   b. Comparer les matrices de f et $f^\star$ dans une base orthonormale $\underline{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ donnée de E.
   c. Identifier l'endomorphisme $f^{\star\star}$.
   d. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que F est stable par f si, et seulement si, le sous-espace $\mathrm{F}^\perp$ est stable par $f^\star$.
   e. Établir les relations :
   $$\operatorname{Ker} f^\star = (\operatorname{Im} f)^\perp, \quad \operatorname{Im} f^\star = (\operatorname{Ker} f)^\perp,$$
   $$\operatorname{Ker}(f^\star \circ f) = \operatorname{Ker} f \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(f \circ f^\star) = \operatorname{Im} f.$$

12 ✎ Soit $n \geqslant 1$. On munit l'espace vectoriel $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique.

1. Vérifier que pour toutes matrices $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, $\operatorname{tr}(\mathrm{AB}) = \operatorname{tr}(\mathrm{BA})$.
2. Montrer que les sous-espaces $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbf{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices respectivement symétriques et antisymétriques sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Déterminer le projeté orthogonal d'une matrice $\mathrm{A} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ sur le sous-espace $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$.

13 ✎ On munit $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$ de son produit scalaire canonique.

1. Montrer que $\mathrm{F} = \{\mathrm{P} \in \mathbb{R}_3[\mathrm{X}] : \mathrm{P}(1) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$.
2. Déterminer une base orthonormale de F.
3. Déterminer le projeté orthogonal de X sur F.
4. Retrouver ce résultat par une méthode plus simple.

14 Soit E un espace euclidien de dimension n rapporté à une base orthonormale $\underline{e}$. On considère un vecteur $u \in$ E unitaire et on note U la colonne de ses coordonnées en base $\underline{e}$. Soient H l'hyperplan normal à u et p la projection orthogonale sur H.
Montrer que l'endomorphisme p est représenté en base $\underline{e}$ par la matrice $\mathrm{I}_n - \mathrm{U}{}^t\mathrm{U}$ en utilisant successivement les trois méthodes suivantes :

1. En appliquant une formule du cours ;
2. En redémontrant cette formule du cours sur le cas traité ;
3. En montrant que l'endomorphisme représenté par $\mathrm{A} = \mathrm{I}_n - \mathrm{U}{}^t\mathrm{U}$ en base $\underline{e}$ est la projection p.

15 ♣ Soient E un espace euclidien et $\underline{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs de E.

1. On suppose la famille $\underline{u}$ orthonormale. Montrer que :
   $$\forall x \in \mathrm{E}, \quad \sum_{k=1}^{n} \langle u_k, x\rangle^2 \leqslant \|x\|^2$$
   avec égalité lorsque la famille $\underline{u}$ est une base orthonormale de E.
2. On suppose réciproquement que :
   $$\forall x \in \mathrm{E}, \quad \sum_{k=1}^{n} \langle u_k, x\rangle^2 = \|x\|^2 .$$
   a. En considérant l'orthogonal du sous-espace vectoriel engendré par la famille $\underline{u}$, montrer que celle-ci est génératrice de E.
   b. On suppose dans cette question que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\|u_i\| \geqslant 1$. Montrer que $\underline{u}$ est une base orthonormale de E.
   c. On suppose dans cette question que la famille $\underline{u}$ est libre. Montrer que c'est une base orthonormale de E.
   Indication. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on pourra considérer un vecteur orthogonal à l'hyperplan engendré par la famille $(u_j)_{j \neq i}$ afin de se ramener au cas traité en **b.**.

16 Soient E un espace euclidien rapporté à une base $(e_1, \ldots, e_n)$ orthonormale.
Soit p un projecteur orthogonal de E sur une droite D. Montrer que :
$$\sum_{i=1}^{n} \|p(e_i)\|^2 = 1.$$

17 Soient $p \leqslant n$ deux entiers naturels non nuls. On munit les espaces $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de leurs produits scalaires canoniques et l'on considère une matrice $\mathrm{A} \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Soit q la projection orthogonale de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sur le sous-espace vectoriel $\operatorname{Im} \mathrm{A}$.

1. On suppose, dans cette question seulement, que $n = p$ et l'on considère la matrice Q représentative de q en base canonique.
   a. Pour $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, montrer que ${}^t\mathrm{XQY} = {}^t\mathrm{X}{}^t\mathrm{QY}$ en considérant $\langle \mathrm{X} - \mathrm{QX}, \mathrm{QY}\rangle$. En déduire que Q est symétrique.
   b. Que vaut le produit QA ? En déduire que :
   $$(\operatorname{tr} \mathrm{A})^2 \leqslant (\operatorname{rg} \mathrm{A}) \operatorname{tr}({}^t\mathrm{AA}).$$
2. On revient au cas général $p \leqslant n$ et l'on suppose que A est de rang p.
   a. Montrer que $\operatorname{Ker}({}^t\mathrm{AA}) = \operatorname{Ker} \mathrm{A}$ et en déduire que A est inversible.
   b. Montrer que $\mathrm{Q} = \mathrm{A}({}^t\mathrm{AA})^{-1}{}^t\mathrm{A}$ est la matrice représentative de q en base canonique.

18 ★♣ Soit p un projecteur non nul d'un espace euclidien E.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   $$\forall a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=1}^{n} |a_k| \leqslant \sqrt{n} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}.$$

2. En déduire que l'ensemble $\left\{\frac{\|p(x)\|}{\|x\|}\right\}_{x\in \mathrm{E}\setminus\{0\}}$ est majoré par $\sqrt{n}\max_{1\leqslant k\leqslant n}\|p(e_k)\|$, où $(e_1,\dots,e_n)$ est une base orthonormale de E.

On pose :

$$\|p\| = \sup_{x\in \mathrm{E}\setminus\{0\}} \frac{\|p(x)\|}{\|x\|}.$$

3. Montrer que $\|p\| \geqslant 1$.

On souhaite à présent démontrer que p est un projecteur orthogonal si, et seulement si, $\|p\| = 1$ c'est-à-dire, d'après ce qui précède : pour tout $x \in \mathrm{E}$, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

4. Montrer que la condition énoncée est nécessaire pour que p soit un projecteur orthogonal.

5. Montrer qu'elle est suffisante en utilisant les deux méthodes ci-dessous :

a. en étudiant $\|p(\lambda y + z)\|$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $y \in \operatorname{Ker} p$ et $z \in \operatorname{Im} p$;

b. en calculant $\left\|x + \big(p(x) - x\big)\right\|^2$ pour $x \in (\operatorname{Ker} p)^\perp$.

19 ✎ Dans $\mathrm{E} = \mathbb{R}^4$ euclidien canonique, on considère le sous-espace vectoriel F d'équations :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}.$$

1. Décrire géométriquement F puis former une base orthonormale de $\mathrm{F}^\perp$.

2. Déterminer la matrice en base canonique de la projection orthogonale sur F puis de la symétrie orthogonale par rapport à F.

3. Déterminer la distance du vecteur $x = (1, 2, 3, 4)$ au sous-espace F.

20 ✎ **1.** Pour $\mathrm{A} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, justifier que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \mathrm{A}(t)\mathbf{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge.

2. Justifier que l'application

$$(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \longmapsto \langle \mathrm{P},\mathrm{Q}\rangle = \int_0^{+\infty} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\mathbf{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

est un produit scalaire sur $\mathrm{E} = \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.

3. **a.** Calculer $\left\langle \mathrm{X}^i, \mathrm{X}^j\right\rangle$ pour $0 \leqslant i, j \leqslant 2$.

b. Déterminer le projeté orthogonal Π de X^2 sur le sous-espace vectoriel $\mathrm{F} = \mathbb{R}_1[\mathrm{X}]$.

4. Calculer

$$d = \inf_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} (t^2 - at - b)^2 \mathbf{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

21 Soient $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ et

$$\mathrm{H} = \left\{\mathrm{M} = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) : \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{i,j} = 0\right\}.$$

Calculer

$$\delta = \inf_{\mathrm{M}\in\mathrm{H}} \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (a_{i,j} - m_{i,j})^2.$$

22 ✎ On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (2x - y - 1)^2 + (x + 3)^2 + (x - y - 1)^2.$$

Montrer que f présente un minimum global sur $\mathbb{R}^2$, déterminer la valeur de ce minimum ainsi que les points où ce minimum est atteint.

23 ★ **Ajustement affine d'une série statistique double**

On se donne $n \geqslant 2$ points $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ de $\mathbb{R}^2$ (on parle de nuage de points). On suppose que tous ces points n'ont pas même abscisse, i.e. que $x_1, \dots, x_n$ ne sont pas tous égaux.

Pour $m, p \in \mathbb{R}$, on s'intéresse à la quantité

$$\delta(m, p) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - mx_i - p)^2,$$

qui mesure la « distance verticale » du nuage de points à la droite d'équation $y = mx + p$.

1. Justifier l'existence d'une unique droite d'équation $y = mx + p$, appelée ***droite de régression*** de y en x (ou ***droite des moindres carrés*** de y en x) dont les coefficients m et p minimisent la fonction

$$\delta(m, p) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - mx_i - p)^2.$$

2. *Application.* Déterminer la droite de régression de y en x du nuage constitué des points $\mathrm{A}_1 = (1, 2)$, $\mathrm{A}_2 = (0, -1)$, $\mathrm{A}_3 = (2, 2)$ et $\mathrm{A}_4 = (-1, -2)$.

24 ♣ Pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné, on considère un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sur $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

1. **a.** Justifier que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, il existe un unique plynôme P_k de $\mathbb{R}_k[\mathrm{X}]$ qui soit unitaire (i.e. de coefficient de plus haut degré égal à 1) et orthogonal à $\mathbb{R}_{k-1}[\mathrm{X}]$.

b. Justifier que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, P_k est de degré k. On pose $\mathrm{P}_0 = 1$ et, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\mathrm{Q}_k = \frac{1}{\|\mathrm{P}_k\|}\mathrm{P}_k$.

2. **a.** Montrer que $(\mathrm{Q}_0, \mathrm{Q}_1, \dots, \mathrm{Q}_n)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

b. Justifier que $(\mathrm{Q}_0, \mathrm{Q}_1, \dots, \mathrm{Q}_n)$ est la base orthonormale de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ obtenue par application du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base canonique.

Dans la suite de l'exercice, on considère que la produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ est défini par

$$\forall \mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}], \quad \langle \mathrm{P}, \mathrm{Q}\rangle = \int_a^b \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)w(t)\,\mathrm{d}t$$

où $a < b$ sont deux réels et $w : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction (appelée *poids*) continue à valeurs strictement positives.

3. Justifier que la formule ci-dessus définit bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

4. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. On note $y_1, \dots, y_r$ les racines d'ordre impair de Q_k et on définit le polynôme $\mathrm{D} = \prod_{i=1}^{r}(\mathrm{X} - y_i)$ (dans le cas où Q_k n'a aucune racine d'ordre impair dans $]a, b[$, on pose $\mathrm{D} = 1$).

a. Justifier que $\mathrm{Q}_k\mathrm{D}$ garde un signe constant sur $[a, b]$.

b. En raisonnant par l'absurde, en déduire que $r = k$.

c. Qu'en déduit-on sur Q_k ?

5. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.

a. Justifier l'existence de réels $a_0, a_1, \dots, a_{k+1}$ tels que $XQ_k = \sum_{i=0}^{k+1} a_i Q_i$. Montrer que $a_0 = \cdots = a_{k-2} = 0$.

b. En déduire l'existence de trois réels α_k, β_k et γ_k tels que

$$Q_{k+1} = (\alpha_k X + \beta_k) Q_k + \gamma_k Q_{k-1}.$$