Travaux dirigés

Espaces euclidiens

ECS2 – Lycée La Bruyère, Versailles

Année 2017/2018

Exercice 1

Question 1

L'application est :

- linéaire à gauche
- symétrique
- donc linéaire à droite
- définie-positive : pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$,
$$\langle P, P\rangle = \sum_{j=0}^{n} P(a_j)^2 \geqslant 0$$
avec égalité si, et seulement si, $P(a_j) = 0$ pour tout $j \in [\![0, n]\!]$ (par positivité des termes de la somme). Mais alors le polynôme P, de degré inférieur ou égal à n, admet au moins $n+1$ racines : il est donc nul.

Exercice 1

Question 2.a

Par définition,
$$L_i(a_j) = \prod_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ k\neq i}} \frac{a_j - a_k}{a_i - a_k}.$$

- Si $i = j$, alors $L_i(a_j) = 1$
- Si $i \neq j$, alors le facteur d'indice $k = j$ est nul, donc $L_i(a_j) = 0$.

En conclusion,
$$L_i(a_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}.$$

Exercice 1

Question 2.b

Pour $i, j \in [\![0, n]\!]$, on a :
$$\langle L_i, L_j\rangle = \sum_{k=0}^{n} L_i(a_k)L_j(a_k).$$

- Si $i = j$, seul le terme d'indice $k = i$ n'est pas nul et $\langle L_i, L_j\rangle = 1$
- Si $i \neq j$, tous les termes sont nuls et $\langle L_i, L_j\rangle = 0$.

La famille $(L_0, \dots, L_n)$ est donc orthonormale. Une telle famille est libre et, formée de $n+1$ vecteurs de l'espace E de dimension $n+1$, c'est donc une base de E, orthonormale comme on vient de le voir.

Exercice 1

Question 2.c

Comme la base $(L_0, \dots, L_n)$ est orthonormale, les coordonnées d'un vecteur $P \in \mathbb{R}_n[X]$ dans cette base sont données par les produits scalaires
$$\langle L_i, P\rangle = \sum_{j=0}^{n} L_i(a_j)P(a_j) = P(a_i).$$

On peut donc écrire :
$$P = \sum_{i=0}^{n} P(a_i)L_i.$$

Exercice 2

De l'hypothèse $A^2 = A$ on déduit tout d'abord que $f^2 = f$ ou en d'autres termes que f est un projecteur.
Il reste à voir que les sous-espaces $F = \operatorname{Im} f = \operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ et $G = \operatorname{Ker} f$ sont orthogonaux. On considère donc deux vecteurs $x \in F$ et $y \in G$ ainsi que les matrices colonnes X et Y de leurs coordonnées dans la base $\underline{e}$. D'après l'expression du produit scalaire en base orthonormale, on a :
$$\langle x, y\rangle = \langle f(x), y\rangle = {}^t(AX)Y = {}^tX{}^tAY = {}^tXAY = \langle x, f(y)\rangle = 0,$$
d'où le résultat.

Exercice 3

Si Q désigne la matrice de passage de la base $\underline{e}$ à une base $\underline{\varepsilon}$, alors le produit scalaire est représenté dans cette base par la matrice $B = {}^tQAQ$. En choisissant $\underline{\varepsilon}$ orthonormale, cette relation s'écrit $I_n = {}^tQAQ$ c'est-à-dire $A = {}^tPP$ où $P = Q^{-1}$.
Un produit de matrices inversibles étant inversible, il en résulte que A est inversible.

Exercice 4

On commence par vérifier que la famille (J, K, L) est libre : pour $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$,
$$\lambda J + \mu K + \nu L = 0 \iff \begin{pmatrix} \lambda+\mu+\nu & \lambda+\nu & 0 \\ 0 & \lambda+\mu+\nu & \mu+\nu \\ 0 & 0 & \lambda+\mu+\nu \end{pmatrix} = 0$$
$$\iff \begin{cases} \lambda+\mu+\nu = 0 \\ \lambda+\nu = 0 \\ \mu+\nu = 0 \end{cases} \iff \lambda = \mu = \nu = 0.$$
Ainsi (J, K, L) est libre ; c'est donc une base de F qui est par suite de dimension 3.

On applique le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base (J, K, L) pour obtenir une base orthogonale (U, V, W) de F. On obtient successivement $U = J$ avec $\|U\| = 2$,

$$V = K - \frac{\langle U, K\rangle}{\|U\|^2} U = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

avec $\|V\| = \frac{\sqrt{7}}{2}$ et

$$W = L - \frac{\langle U, L\rangle}{\|U\|^2} U - \frac{\langle V, L\rangle}{\|V\|^2} V = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}-1 & 3 & 0\\ 0 & -1 & 3\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

avec $\|W\| = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

Il ne reste plus qu'à normaliser les vecteurs précédents pour obtenir une base orthonormale de F :

$$\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \frac{1}{2\sqrt{7}}\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{21}}\begin{pmatrix}-1 & 3 & 0\\ 0 & -1 & 3\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\right).$$

Exercice 5
Question 1.a

Pour $f, g \in E$, la fonction fg est continue sur $[0, +\infty[$ avec :

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad |f(t)g(t)| \leqslant \frac{f(t)^2 + g(t)^2}{2},$$

d'où la convergence absolue de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$, par comparaison aux intégrales convergentes $\int_0^{+\infty} f(t)^2\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} g(t)^2\,\mathrm{d}t$.

Exercice 5
Question 1.b

On vérifie que E est un sous-espace de $\mathscr{C}([0, +\infty[, \mathbb{R})$:

- La fonction nulle appartient bien sûr à E.
- Si $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors
$$\int_0^{+\infty} \left(\lambda f(t) + g(t)\right)^2 \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \left(\lambda^2 f(t)^2 + 2\lambda f(t)g(t) + g(t)^2\right) \mathrm{d}t$$
converge par opérations sur les intégrales convergentes d'après la question **1.**, ainsi $\lambda f + g \in E$.

Exercice 5
Question 2

L'application est bien définie d'après la question **1.**, bilinéaire par linéarité de l'intégrale et symétrique. De plus, pour $f \in E$,

$$\langle f, f\rangle = \int_0^{+\infty} f(t)^2\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

Par continuité et positivité de la fonction f^2, l'égalité $\langle f, f\rangle = 0$ implique $f(t)^2 = 0$ pour tout $t \in [0, +\infty[$ et f est alors identiquement nulle sur $[0, +\infty[$. Ainsi l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie-positive et constitue donc un produit scalaire.

Exercice 5
Question 3.a

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_k est continue sur $[0, +\infty[$. De plus, la fonction $t \longmapsto f_k(t)^2 = \mathbf{e}^{-2kt}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et admet pour primitive $t \longmapsto -\frac{1}{2k}\mathbf{e}^{-2kt}$, qui admet une limite finie en $+\infty$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} f_k(t)^2\,\mathrm{d}t$ est donc convergente et la fonction f_k appartient à E.

Exercice 5
Question 3.b

Pour $k, l \in \mathbb{N}^*$,

$$\langle f_k, f_\ell\rangle = \int_0^{+\infty} \mathbf{e}^{-(k+\ell)t}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{k+\ell}\mathbf{e}^{-(k+\ell)t}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{k+\ell}.$$

Exercice 5
Question 4

On applique le procédé de Gram-Schmidt à la famille (f_1, f_2, f_3) pour obtenir une base orthogonale (g_i) de $F = \mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3)$. On pose $g_1 = f_1$ avec $\|g_1\| = \sqrt{\langle f_1, f_1\rangle} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
Puis

$$g_2 = f_2 - \frac{\langle g_1, f_2\rangle}{\|g_1\|^2} g_1 = f_2 - \frac{2}{3} f_1$$

avec

$$\|g_2\| = \sqrt{\|f_2\|^2 - \frac{4}{3}\langle f_1, f_2\rangle + \frac{4}{9}\|f_1\|^2} = \frac{1}{6}.$$

Enfin,

$$g_3 = f_3 - \frac{\langle g_1, f_3\rangle}{\|g_1\|^2} g_1 - \frac{\langle g_2, f_3\rangle}{\|g_2\|^2} g_2 = f_3 - \frac{6}{5} f_2 + \frac{3}{10} f_1$$

avec

$$\|g_3\| = \frac{1}{10\sqrt{6}}.$$

On en déduit que les vecteurs
$$\frac{g_1}{\|g_1\|} = \sqrt{2}f_1, \quad \frac{g_2}{\|g_2\|} = 6f_2 - 4f_1 \quad \text{et} \quad \frac{g_3}{\|g_3\|} = \sqrt{6}(10f_3 - 12f_2 + 3f_1)$$
forment une famille orthonormale donc libre de F et même, comme $\dim F \leqslant 3$, une base orthonormale de F.
Il en résulte en particulier que F est de dimension 3 et donc que sa famille génératrice (f_1, f_2, f_3) est libre, ce qu'il n'a pas été nécessaire de vérifier au préalable. (Si la famille avait été liée, on aurait obtenu un vecteur g_i nul.)

Exercice 7

Question 1

1. On a tout d'abord $F \subset F + G$ d'où $(F+G)^\perp \subset F^\perp$. De même, $(F+G)^\perp \subset G^\perp$ d'où $(F+G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$.
2. Réciproquement si $x \in F^\perp \cap G^\perp$ alors, pour tous $y \in F$ et $z \in G$,
$$\langle x, y+z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle = 0$$
si bien que $x \perp F + G$. D'où l'inclusion $F^\perp \cap G^\perp \subset (F+G)^\perp$.

Exercice 7

Question 2

En appliquant la formule de la question **1.** aux sous-espaces $F^\perp$ et $G^\perp$, on obtient :
$$(F^\perp + G^\perp)^\perp = F^{\perp\perp} \cap G^{\perp\perp}.$$
En prenant l'orthogonal des deux membres, on en déduit puisque E est euclidien :
$$F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp.$$

Remarque. En dimension quelconque, on peut montrer l'inclusion
$$F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp,$$
mais la réciproque peut être fausse.

Exercice 8

1. On vérifie dans un premier temps que la somme $F^\perp \oplus G^\perp$ est directe.
Soit pour cela un vecteur $x \in F^\perp \cap G^\perp$. Puisque $E = F \oplus G$, on peut écrire $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$. Comme $x \in F^\perp$, on a $\langle x, y\rangle = 0$ et de même $\langle x, z\rangle = 0$. Par suite,
$$\langle x, x\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle = 0$$
d'où l'on déduit que $x = 0$.
2. On a par ailleurs, en s'appuyant à nouveau sur $E = F \oplus G$,
$$\begin{aligned}\dim F^\perp + \dim G^\perp &= (\dim E - \dim F) + (\dim E - \dim G)\\ &= 2\dim E - (\dim F + \dim G)\\ &= 2\dim E - \dim E = \dim E.\end{aligned}$$

Dans ces conditions, les sous-espaces $F^\perp$ et $G^\perp$ sont supplémentaires dans E.

Remarque. Les deux points peuvent s'obtenir comme conséquences directes des formules de l'exercice précédent.

Exercice 9

Question 1

Pour $x, y \in E$, on a par hypothèse et bilinéarité du produit scalaire :
$$\begin{aligned}0 &= \langle f(x+y), x+y\rangle = \langle f(x) + f(y), x\rangle + \langle f(x) + f(y), y\rangle\\ &= \langle f(x), x\rangle + \langle f(y), x\rangle + \langle f(x), y\rangle + \langle f(y), y\rangle\\ &= \langle f(y), x\rangle + \langle f(x), y\rangle,\end{aligned}$$
d'où le résultat :
$$\langle f(x), y\rangle = -\langle x, f(y)\rangle.$$

Exercice 9

Question 2

1. On a tout d'abord $\operatorname{Ker} f \subset (\operatorname{Im} f)^\perp$.
En effet, pour $x \in \operatorname{Ker} f$ et $y \in \operatorname{Im} f$, il existe $z \in E$ tel que $y = f(z)$ et alors
$$\langle x, y\rangle = \langle x, f(z)\rangle = -\langle f(x), z\rangle = -\langle 0, z\rangle = 0.$$
2. Par ailleurs, le théorème du rang assure que :
$$\dim(\operatorname{Im} f)^\perp = \dim E - \dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Ker} f.$$

On a donc égalité des dimensions dans la première inclusion, qui est donc une égalité : $(\operatorname{Im} f)^\perp = \operatorname{Ker} f$.

Remarque. L'inclusion $(\operatorname{Im} f)^\perp \subset \operatorname{Ker} f$ peut être établie à la main : pour $x \in (\operatorname{Im} f)^\perp$, il vient :
$$\forall y \in E, \quad 0 = \langle x, f(y)\rangle = -\langle f(x), y\rangle$$
si bien que le vecteur $f(x)$ est orthogonal à tous les autres : il est donc nul et $x \in \operatorname{Ker} f$.

Exercice 9

Question 3.a

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de f et $x \in E \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé. Par hypothèse, les vecteurs x et $f(x) = \lambda x$ sont orthogonaux, ce qui s'écrit $0 = \langle x, \lambda x\rangle = \lambda \langle x, x\rangle$. Comme $x \neq 0$ par hypothèse, on a $\langle x, x\rangle \neq 0$ et donc $\lambda = 0$.
Ainsi la seule valeur propre *éventuelle* de f est 0.

Exercice 9

Question 3.b

Si f est diagonalisable, il est représenté dans une base adaptée par une matrice D diagonale. Les coefficients diagonaux de D étant valeurs propres de f, ils sont tous nuls d'après **a.**. L'endomorphisme f, représenté par la matrice $D = 0$, est donc nul.
La réciproque étant évidente, on peut donc énoncer que f est diagonalisable si, et seulement si, f est l'endomorphisme nul.

Exercice 9

Question 4

D'après la question **2.**, les sous-espaces $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires orthogonaux dans l'espace euclidien E :

$$E = \operatorname{Ker} f \oplus^{\perp} \operatorname{Im} f.$$

Dans ces conditions, la concaténation d'une BON de $\operatorname{Ker} f$ et d'une BON de $\operatorname{Im} f$ donne une BON de E, dans laquelle f est représenté par une matrice par blocs

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix}$$

où $A' \in \mathbf{M}_r(\mathbb{R})$ avec $r = \operatorname{rg} f$, car $\operatorname{Im} f$ est stable par f. On peut ajouter que A' est antisymétrique ; en effet, la matrice A elle-même est antisymétrique car, représentant l'endomorphisme f en BON, elle a pour coefficient générique

$$a_{i,j} = \langle e_i, f(e_j) \rangle = -\langle f(e_i), e_j \rangle = -a_{j,i}, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n.$$

Exercice 12

Question 1

1. Les sous-espaces sont orthogonaux. En effet, pour $S \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ et $A \in \mathbf{A}_n(\mathbb{R})$,
$$\langle S, A \rangle = \operatorname{tr}({}^t SA) = \operatorname{tr}(SA)$$
mais d'autre part :
$$\langle S, A \rangle = \langle A, S \rangle = \operatorname{tr}({}^t AS) = -\operatorname{tr}(AS).$$
On conclut que $\langle A, S \rangle = 0$ en remarquant que $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ pour toutes matrices $A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.
2. La somme $\mathbf{S}_n(\mathbb{R}) + \mathbf{A}_n(\mathbb{R})$, orthogonale, est donc directe. Par ailleurs,
$$\dim \mathbf{S}_n(\mathbb{R}) + \dim \mathbf{A}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2 = \dim \mathbf{M}_n(\mathbb{R}),$$
donc les sous-espaces $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbf{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

Remarque. On peut justifier directement que les sous-espaces $\mathbf{S}_n(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker}(T - \mathrm{id})$ et $\mathbf{A}_n(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker}(T + \mathrm{id})$ sont supplémentaires dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ en observant que l'endomorphisme $T : A \longmapsto {}^t A$ est une symétrie : $T \circ T = \mathrm{id}$.

Exercice 12

Question 2

Pour $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, on a classiquement :

$$A = \frac{A + {}^t A}{2} + \frac{A - {}^t A}{2}$$

avec

$$\frac{A + {}^t A}{2} \in \mathbf{S}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \frac{A - {}^t A}{2} \in \mathbf{A}_n(\mathbb{R}) = \mathbf{S}_n(\mathbb{R})^{\perp}.$$

Le projeté orthogonal de A sur $\mathbf{S}_n(\mathbb{R})$ est donc donné par :

$$p_{\mathbf{S}_n(\mathbb{R})}(A) = \frac{A + {}^t A}{2}.$$

Exercice 13

Question 1

On peut vérifier le critère de sous-espace ou remarquer que $F = \operatorname{Ker} \phi$ où ϕ est l'application linéaire définie par

$$\phi : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}, P \longmapsto P(1).$$

Cette deuxième technique a l'avantage de montrer en plus que F est un hyperplan de $\mathbb{R}_3[X]$ en tant que noyau d'une forme linéaire non nulle.

Exercice 13

Question 2

On construit tout d'abord une base de F. On peut par exemple considérer les vecteurs $U_1 = X - 1$, $U_2 = X^2 - 1$ et $U_3 = X^3 - 1$. Il s'agit en effet de trois vecteurs de F linéairement indépendants car non nuls et de degrés deux-à-deux distincts, qui forment donc une base de F puisque celui-ci est de dimension 3. On applique ensuite de procédé de Gram-Schmidt pour obtenir une base orthogonale (W_1, W_2, W_3) de F. On pose $W_1 = U_1$ avec $\|W_1\| = \sqrt{2}$, puis

$$W_2 = U_2 - \frac{\langle W_1, U_2 \rangle}{\|W_1\|^2} W_1 = X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{2},$$

avec $\|W_2\| = \sqrt{3/2}$ et enfin

$$W_3 = U_3 - \frac{\langle W_1, U_3 \rangle}{\|W_1\|^2} W_1 - \frac{\langle W_2, U_3 \rangle}{\|W_2\|^2} W_2 = X^3 - \frac{1}{3}X^2 - \frac{1}{3}X - \frac{1}{3}$$

avec $\|W_3\| = \sqrt{4/3}$.

D'où une base orthonormale de F formée par les trois vecteurs :

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(X-1), \quad V_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}\Big(X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}\Big), \quad V_3 = \sqrt{\frac{3}{4}}\Big(X^3 - \frac{1}{3}X^2 - \frac{1}{3}X - \frac{1}{3}\Big).$$

Exercice 13

Question 3

À partir de la base orthonormale (V_1, V_2, V_3) de F obtenue en **2.**, on peut calculer le projeté orthogonal de X sur F :

$$\begin{aligned} p_F(X) &= \sum_{i=1}^{3} \langle V_i, X \rangle \, V_i = \sum_{i=1}^{3} \frac{\langle W_i, X \rangle}{\|W_i\|^2} W_i \\ &= \frac{1}{2}W_1 - \frac{1}{2}\frac{2}{3}W_2 - \frac{1}{3}\frac{3}{4}W_3 \\ &= -\frac{1}{4}X^3 - \frac{1}{4}X^2 + \frac{3}{4}X - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

On peut aussi utiliser la technique générale de projection orthogonale sur un hyperplan. En effet, en notant $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3$, la condition d'appartenance à F s'écrit :

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0.$$

Le sous-espace F est donc l'hyperplan normal à $N = 1 + X + X^2 + X^3$. Par suite, le projeté orthogonal de X sur F est donné par :

$$p_F(X) = X - \frac{\langle N, X \rangle}{\|N\|^2} N = X - \frac{1}{4}N = -\frac{1}{4}X^3 - \frac{1}{4}X^2 + \frac{3}{4}X - \frac{1}{4}$$

Exercice 14

Tout d'abord, p est reliée à la projection orthogonale q sur la droite $H^\perp = D$ dont (u) est une base orthonormale par la formule $p = \mathrm{id}_E - q$. La projection q étant, d'après le cours, représentée en base orthonormale $\underline{e}$ par la matrice U^tU, la projection p est donc représentée par la matrice $I_n - U^tU$.
Il faut savoir justifier la formule précédente :

$$\forall x \in E, \quad p(x) = x - q(x) = x - \langle u, x\rangle\, u.$$

Si A désigne la matrice représentative de p en base $\underline{e}$ et X la matrice colonne représentative de x en base $\underline{e}$, cela s'écrit encore, d'après l'expression du produit scalaire en base orthonormale,

$$\forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad AX = X - ({}^tUX)U = X - U({}^tUX) = (I_n - U^tU)X.$$

Par unicité de la matrice représentative de p, on a donc $A = I_n - U^tU$.

Comme la matrice $A = I_n - U^tU$ est donnée dans l'énoncé, on peut procéder différemment.

1. Tout d'abord,

$$A^2 = I_n - 2U^tU + U({}^tUU)^tU = I_n - U^tU = A$$

car ${}^tUU = \|u\|^2 = 1$ d'après l'expression de la norme en base orthonormale et l'hypothèse u unitaire. L'endomorphisme f de E représenté en base $\underline{e}$ par la matrice A est donc un projecteur. Soient $F = \operatorname{Im} f = \operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ et $G = \operatorname{Ker} f$ les sous-espaces caractéristiques de ce projecteur.

2. Par ailleurs,

$$AU = U - U({}^tUU) = U - U = 0$$

si bien que $u \in \operatorname{Ker} f$ et donc $D = \operatorname{Vect}(u) \subset G$.
Pour $x \in H$, on a $0 = \langle u, x\rangle = {}^tUX$ vu l'expression du produit scalaire en base orthonormale, d'où

$$AX = X - U({}^tUX) = X$$

et donc $f(x) = x$, si bien que $H \subset F$.

3. Les inclusions précédentes donnent les inégalités $n - 1 \leqslant \dim F$ et $1 \leqslant \dim G$, qui sont nécessairement des égalités puisque F et G sont supplémentaires. Ainsi les inclusions précédentes sont des égalités et les sous-espaces $F = H$ et $G = H^\perp$ sont donc supplémentaires orthogonaux.

En conclusion, f est la projection orthogonale sur H donc $p = f$ est représenté par la matrice $A = I_n - U^tU$ en base $\underline{e}$.

Exercice 15

Question 1

En notant p_F le projecteur orthogonal sur le sous-espace $F = \operatorname{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$, on montre classiquement pour $x \in E$ que :

$$\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2 \geqslant \|p_F(x)\|^2 \tag{1}$$

en appliquant le théorème de Pythagore aux vecteurs $p_F(x) \in F$ et $x - p_F(x) \in F^\perp$.
Sachant que $\underline{u}$ est une base orthonormale de F, on a par ailleurs :

$$p_F(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle u_k, x\rangle\, u_k$$

d'où le résultat en utilisant l'expression de la norme en base orthonormale :

$$\sum_{k=1}^{n} \langle u_k, x\rangle^2 \leqslant \|x\|^2 . \tag{2}$$

On a égalité en (2) si, et seulement si, (1) est une égalité i.e. si, et seulement si, $x - p_F(x) = 0$ c'est-à-dire $x \in F$.
Pour que l'égalité ait lieu pour tout $x \in E$, il faut et il suffit donc que $F = E$ i.e. que $\underline{u}$ soit une base orthonormale de E.

Remarque. On peut également raisonner en complétant la famille orthonormale $(u_1, \ldots, u_n)$ en une base orthonormale $(u_1, \ldots, u_n, u_{n+1}, \ldots, u_d)$ de E. On a alors, pour $x \in E$, vu l'expression de la norme et des coordonnées en base orthonormale :

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{d} \langle u_k, x\rangle^2 \geqslant \sum_{k=1}^{n} \langle u_k, x\rangle^2$$

avec égalité si, et seulement si, $\langle u_k, x\rangle = 0$ pour tout $k \in [\![n+1, d]\!]$ c'est-à-dire $x \in \big(\operatorname{Vect}(u_{n+1}, \ldots, u_d)\big)^\perp = F$. On conclut de même.

Exercice 15

Question 2.a

Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par $u_1, \ldots, u_n$. Pour $x \in F^\perp$,

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle u_k, x\rangle^2 = 0$$

si bien que $x = 0$. Ainsi $F^\perp = \{0\}$ d'où $F = F^{\perp\perp} = \{0\}^\perp = E$ dans l'espace euclidien E. La famille $\underline{u}$ est donc génératrice de E.

Exercice 15

Question 2.b

Soit $i \in [\![1, n]\!]$. En appliquant l'hypothèse au vecteur u_i, il vient :

$$\|u_i\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle u_k, u_i\rangle^2 = \|u_i\|^4 + \sum_{k \neq i} \langle u_k, u_i\rangle^2 .$$

Mais partant de $\|u_i\| \geqslant 1$, il vient $\|u_i\|^2 \leqslant \|u_i\|^4$, d'où finalement

$$\|u_i\|^2 = \|u_i\|^4 \quad \text{et} \quad \sum_{k \neq i} \langle u_k, u_i\rangle^2 = 0,$$

c'est-à-dire $\|u_i\| = 1$ et, pour tout $k \neq i$, $\langle u_k, u_i\rangle = 0$ par positivité.

La famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est ainsi orthonormale donc libre. Étant par ailleurs génératrice d'après **a.**, c'est donc une base orthonormale de E.

Exercice 15

Question 2.c

Libre par hypothèse et génératrice d'après **a.**, la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base de E.
Pour $i \in [\![1, n]\!]$ donné, le sous-espace engendré par la famille $(u_j)_{j\neq i}$ est donc un hyperplan H_i, dans l'orthogonal duquel on peut trouver un vecteur $x_i \neq 0$. Par hypothèse, on a alors

$$\|x_i\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle u_k, x_i\rangle^2 = \langle u_i, x_i\rangle^2 \leqslant \|u_i\|^2 \|x_i\|^2$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. En divisant par $\|x_i\|^2 > 0$, on en déduit alors que $\|u_i\| \geqslant 1$, ce qui permet de conclure en appliquant le résultat de la question **b.**.

Remarque. Si la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ n'est pas libre, il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $(u_j)_{j\neq i}$ soit génératrice de E, et il n'est alors pas possible de trouver un vecteur $x_i \neq 0$ pour raisonner comme ci-dessus. Un contre-exemple évident est donné dans $\mathbb{R}$ euclidien canonique par la famille à deux éléments, tous deux égaux à $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Exercice 16

Étant donnée une base orthonormale (a) de $D = \operatorname{Im} p$, on a $p(x) = \langle a, x\rangle\, a$ donc $\|p(x)\|^2 = \langle a, x\rangle^2$ pour tout $x \in E$, si bien que

$$\sum_{i=1}^{n} \|p(e_i)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle a, e_i\rangle^2 = \|a\|^2 = 1$$

vu l'expression de la norme (et des coordonnées) en base orthonormale.

Remarque. On peut montrer plus généralement que pour tout projecteur orthogonal p,

$$\sum_{i=1}^{n} \|p(e_i)\|^2 = \operatorname{rg} p.$$

Exercice 18

Question 1

C'est une application directe de l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'espace $\mathbb{R}^n$ euclidien canonique aux vecteurs $x = (1, \ldots, 1)$ et $y = (|a_1|, \ldots, |a_n|)$:

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| = \langle x, y\rangle \leqslant \|x\|\,\|y\| = \sqrt{n}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}.$$

Exercice 18

Question 2

Soit $\underline{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E. Tout vecteur $x \in E$ peut alors se décomposer sous la forme $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ et alors

$$p(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k p(e_k)$$

donc, par inégalité triangulaire,

$$\|p(x)\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k|\,\|p(e_k)\|\,.$$

Ainsi, en notant $\kappa = \max_{1\leqslant k\leqslant n} \|p(e_k)\|$, on a d'après la question **1.** :

$$\|p(x)\| \leqslant \kappa \sum_{k=1}^{n} |x_k| \leqslant \kappa\sqrt{n}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} = \kappa\sqrt{n}\,\|x\|$$

vu l'expression de la norme en base orthonormale.
Ainsi, l'ensemble $\left\{\frac{\|p(x)\|}{\|x\|}\right\}_{x\in E\setminus\{0\}}$ est majoré par $\kappa\sqrt{n}$.

Exercice 18

Question 3

Pour $x_0 \in \operatorname{Im} p \setminus \{0\}$ (existe car $p \neq 0$ par hypothèse), on a $p(x_0) = x_0$ donc

$$\|p\| = \sup_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{\|p(x)\|}{\|x\|} \geqslant \frac{\|p(x_0)\|}{\|x_0\|} = 1.$$

Exercice 18

Question 4

On suppose le projecteur p orthogonal : c'est donc le projecteur sur $F = \operatorname{Im} p$ parallèlement à $F^\perp$. Pour $x \in E \setminus \{0\}$, les vecteurs $p(x) \in F$ et $x - p(x) \in F^\perp$ sont donc orthogonaux, d'où d'après le théorème de Pythagore :

$$\|x\|^2 = \left\|p(x) + (x - p(x))\right\|^2 = \|p(x)\|^2 + \left\|x - p(x)\right\|^2 \geqslant \|p(x)\|^2\,.$$

Par suite,

$$\frac{\|p(x)\|}{\|x\|} \leqslant 1$$

et comme cette inégalité est réalisée pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, on en déduit que

$$\|p\| = \sup_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{\|p(x)\|}{\|x\|} \leqslant 1.$$

On a donc $\|p\| = 1$ d'après la question **3.**.

Exercice 18

Question 5.a

On suppose que $\|p\| \leqslant 1$, c'est-à-dire

$$\forall x \in E, \quad \|p(x)\| \leqslant \|x\| \qquad (\star)$$

et il s'agit alors de démontrer que le projecteur p est orthogonal, c'est-à-dire que les sous-espaces $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$ sont orthogonaux. Soient donc $y \in \operatorname{Ker} p$ et $z \in \operatorname{Im} p$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, l'inégalité $(\star)$ appliquée au vecteur $x = \lambda y + z$ s'écrit :

$$\|z\| \leqslant \|\lambda y + z\|$$

c'est-à-dire, en élevant au carré :

$$\|z\|^2 \leqslant \lambda^2 \|y\|^2 + 2\lambda \langle y, z\rangle + \|z\|^2\,.$$

On a donc :

$$\forall\lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda\big(\lambda\|y\|^2 + 2\langle y, z\rangle\big) \geqslant 0,$$

ce qui implique $\langle y, z\rangle = 0$, sans quoi on aurait un polynôme du second degré (on peut supposer $y \neq 0$...) qui garde un signe constant alors qu'il présente deux racines distinctes, ce qui est absurde.

Exercice 18

Question 5.b

Pour $x \in E$, on a

$$p\big(p(x) - x\big) = p^2(x) - p(x) = 0$$

donc $p(x) - x \in \operatorname{Ker} p$.
Par suite, si $x \in (\operatorname{Ker} p)^\perp$, alors le théorème de Pythagore appliqué aux vecteurs orthogonaux x et $p(x) - x$ donne :

$$\left\|x + \big(p(x) - x\big)\right\|^2 = \|x\|^2 + \|p(x) - x\|^2$$

d'où l'on déduit, par hypothèse, que

$$\|p(x) - x\|^2 = \|p(x)\|^2 - \|x\|^2 \leqslant 0.$$

Ainsi $x \in (\operatorname{Ker} p)^\perp$ implique $p(x) = x$ c'est-à-dire, puisque p est un projecteur, $x \in \operatorname{Im} p$.
On a ainsi établi l'inclusion $(\operatorname{Ker} p)^\perp \subset \operatorname{Im} p$. Comme on a par ailleurs égalité des dimensions d'après le théorème du rang :

$$\dim(\operatorname{Ker} p)^\perp = \dim E - \dim \operatorname{Ker} p = \dim \operatorname{Im} p,$$

l'inclusion précédente est une égalité : $(\operatorname{Ker} p)^\perp = \operatorname{Im} p$ d'où
$(\operatorname{Im} p)^\perp = (\operatorname{Ker} p)^{\perp\perp} = \operatorname{Ker} p$ ce qui signifie que p est un projecteur orthogonal.

Exercice 19
Question 1

On justifie facilement que F est un plan dont on détermine une base.
Deux vecteurs de $F^\perp$ apparaissent sur les équations : $u_1 = (1, 1, 1, 1)$ et $u_2 = (1, -1, 1, -1)$. En effet, F est défini comme l'intersection des deux hyperplans $D_1^\perp$ et $D_2^\perp$, où D_1 et D_2 sont les droites engendrées par u_1 et u_2. Donc $D_1 = D_1^{\perp\perp} \subset F^\perp$ et de même $D_2 \subset F^\perp$. Plus précisément,

$$F^\perp = (D_1^\perp \cap D_2^\perp)^\perp = D_1^{\perp\perp} + D_2^{\perp\perp} = D_1 + D_2,$$

ce qu'on peut retrouver par un argument dimensionnel :

$$\dim F^\perp = \dim \mathbb{R}^4 - \dim F = 2.$$

Ainsi (u_1, u_2) est une base de $F^\perp$. Les deux vecteurs u_1 et u_2 étant déjà orthogonaux, on en déduit directement une base orthonormale de $F^\perp$:

$$\Big(v_1 = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1), v_2 = \frac{1}{2}(1, -1, 1, -1)\Big).$$

Exercice 19
Question 2

Puisque (v_1, v_2) est une base orthonormale de $F^\perp$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^4, \quad p_{F^\perp}(x) = \langle v_1, x\rangle\, v_1 + \langle v_2, x\rangle\, v_2.$$

Comme les projections orthogonales sur F et sur $F^\perp$ sont liées par $p_F + p_{F^\perp} = \mathrm{id}$, on en déduit la matrice représentative de p_F en base canonique :

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La symétrie orthogonale par rapport à F est quant à elle donnée par $s_F = 2p_F - \mathrm{id}$, d'où sa matrice représentative en base canonique :

$$2A - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 19
Question 3

Pour $x = (1, 2, 3, 4)$, on obtient $p_F(x) = (-1, -1, 1, 1)$ d'où

$$d(x, F) = \|x - p_F(x)\| = \sqrt{26}.$$

Exercice 20
Question 1

La fonction $f : t \longmapsto A(t)\mathbf{e}^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$.
Si $A \neq 0$ est de degré n et de coefficient dominant $a_n \neq 0$, alors $A(t) \sim a_n t^n$ lorsque $t \to +\infty$. On a donc :

$$f(t) \sim a_n t^n \mathbf{e}^{-t}, \quad t \to +\infty$$

ce qui permet de conclure selon l'une des méthodes suivantes :

- on a $f(t) = o(\frac{1}{t^2})$ lorsque $t \to +\infty$ d'où la convergence absolue de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ par comparaison à l'intégrale de Riemann convergente $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$;
- on a
$$f(t) \sim a_n t^n \mathbf{e}^{-t} = a_n t^n \mathbf{e}^{-t/2} \cdot \mathbf{e}^{-t/2} = o(\mathbf{e}^{-t/2}), \quad t \to +\infty,$$
d'où la convergence absolue de $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ par comparaison à l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathbf{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ convergente pour $\alpha > 0$.

Exercice 20
Question 2

L'application est bien définie d'après la question **1.**, bilinéaire par linéarité de l'intégrale et symétrique. De plus, pour $P \in \mathbb{R}_2[X]$,

$$\langle P, P\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)^2 \mathbf{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

Par continuité et positivité de la fonction $t \longmapsto P(t)^2\mathbf{e}^{-t}$, l'égalité $\langle P, P\rangle = 0$ implique $P(t)^2\mathbf{e}^{-t} = 0$ donc $P(t) = 0$ pour tout $t \in [0, +\infty[$. Le polynôme P, qui présente alors une infinité de racines, est nécessairement nul. Ainsi l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie-positive et constitue donc un produit scalaire.

Exercice 20
Question 3.a

Pour $0 \leqslant i, j \leqslant 2$, on a :

$$\langle X^i, X^j\rangle = \int_0^{+\infty} t^{i+j}\mathbf{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \Gamma(i + j + 1) = (i + j)!.$$

Exercice 20
Question 3.b

Le projeté orthogonal Π de X^2 sur le sous-espace vectoriel $F = \mathbb{R}_1[X]$ est caractérisé par les conditions :

$$\begin{cases} \Pi \in \mathbb{R}_1[X] \\ X^2 - \Pi \perp \mathbb{R}_1[X] \end{cases}.$$

La première condition exprime l'existence de deux réels a_0 et b_0 tels que $\Pi = a_0X + b_0$ et la seconde s'écrit alors

$$\begin{aligned}
\begin{cases} X^2 - \Pi \perp 1 \\ X^2 - \Pi \perp X \end{cases} &\iff \begin{cases} \langle X^2 - a_0X - b_0, 1\rangle = 0 \\ \langle X^2 - a_0X - b_0, X\rangle = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a_0\langle X, 1\rangle + b_0\langle 1, 1\rangle = \langle X^2, 1\rangle \\ a_0\langle X, X\rangle + b_0\langle 1, X\rangle = \langle X^2, X\rangle \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a_0 + b_0 = 2 \\ 2a_0 + b_0 = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} a_0 = 4 \\ b_0 = -2 \end{cases}.
\end{aligned}$$

Le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$ est donc $\Pi = 4X - 2$.

Exercice 20
Question 4

Par théorème,

$$\begin{aligned}
d &= \inf_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} (t^2 - at - b)^2\mathbf{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \inf_{a,b\in\mathbb{R}} \left\|X^2 - (aX + b)\right\|^2 \\
&= \inf_{P\in\mathbb{R}_1[X]} \left\|X^2 - P\right\|^2 = \left\|X^2 - \Pi\right\|^2 = \left\|X^2 - 4X + 2\right\|^2 = 4.
\end{aligned}$$

Exercice 21

On munit $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique

$$(B, C) \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})^2 \longmapsto \langle B, C\rangle = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} b_{i,j} c_{i,j},$$

pour lequel :

$$\forall B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), \quad \|B\| = \sqrt{\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} b_{i,j}^2}.$$

On a alors, sous réserve d'existence,

$$\inf_{M \in H} \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (a_{i,j} - m_{i,j})^2 = \inf_{M \in H} \|A - M\|^2$$

où H est un hyperplan de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ comme noyau de la forme linéaire non nulle

$$M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} m_{i,j},$$

ou comme orthogonal de la droite D dirigée par la matrice $\mathbb{1}$, dont tous les coefficients sont égaux à 1.

On a alors par théorème l'existence et la valeur de :

$$\delta = \inf_{M \in H} \|A - M\|^2 = d(A, H)^2 = \|A - p_H(A)\|^2 = \|p_D(A)\|^2$$
$$= \left\| \left\langle \frac{\mathbb{1}}{\|\mathbb{1}\|}, A \right\rangle \frac{\mathbb{1}}{\|\mathbb{1}\|} \right\|^2 = \frac{\langle \mathbb{1}, A\rangle^2}{\|\mathbb{1}\|^2} = \frac{1}{n^2} \Big(\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} \Big)^2.$$

Exercice 22

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$f(x, y) = (2x - y - 1)^2 + (x + 3)^2 + (x - y - 1)^2 = \|AX - B\|^2$$

où :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Comme A est de rang 2, égal à son nombre de colonnes, la fonction f admet donc par théorème un minimum sur $\mathbb{R}^2$, atteint en un unique point donné par la pseudo-solution X_0 du système linéaire $AX = B$. Celle-ci correspond à l'unique solution du système de Cramer ${}^tAAX = {}^tAB$. Les calculs donnent

$${}^tAA = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad {}^tAB = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

La résolution du système linéaire

$${}^tAAX = {}^tAB \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 6x - 3y = 0 \\ -3x + 2y = -2 \end{cases}$$

conduit alors au point $(x_0, y_0) = (-2, -4)$ en lequel f présente un minimum, égal à 3.

Exercice 23

Question 1

Pour $(m, p) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\delta(m, p) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - m x_i - p)^2 = \|AX - B\|^2$$

où

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,2}(\mathbb{R}), \quad X = \begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

et $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne canonique sur $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

Comme la matrice A est de rang 2 (car les x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, ne sont pas tous égaux), égal à son nombre de colonnes, il existe par théorème un unique couple (m, p) minimisant la quantité $\delta(m, p)$, qui correspond à l'unique pseudo-solution du système $AX = B$.

Exercice 23

Question 2

La droite de régression de y en x du nuage de points donné est la droite d'équation $y = mx + p$ où (m, p) est l'unique solution du système linéaire ${}^tAAX = {}^tAB$ où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix}.$$

Le calcul donne

$${}^tAA = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad {}^tAB = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et le système s'écrit donc

$$\begin{cases} 6m + 2p = 8 \\ 2m + 4p = 1 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ p = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

La droite de régression de y en x a donc pour équation $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$.