Lois continues classiques
Feuille d'exercices

1 Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

✎ **1.** Calculer les probabilités suivantes :

$$\mathbb{P}(X \leqslant 1{,}63) \quad \mathbb{P}(X < 1{,}63) \quad \mathbb{P}(X \leqslant -1{,}41)$$
$$\mathbb{P}(X \geqslant -1{,}52) \quad \mathbb{P}(1{,}536 \leqslant X < 1{,}624).$$

2. Calculer les seuils x définis par :

$$\mathbb{P}(X \leqslant x) = 0{,}9463 \quad \mathbb{P}(X \leqslant x) = 0{,}0537 \quad \mathbb{P}(|X| \leqslant x) = 0{,}4844.$$

2 Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(7,4^2)$.

✎ **1.** Calculer les probabilités suivantes :

$$\mathbb{P}(X < 7) \quad \mathbb{P}(X \leqslant 12{,}12) \quad \mathbb{P}(X \leqslant 8{,}26) \quad \mathbb{P}(5{,}25 < X \leqslant 9{,}13).$$

2. Déterminer les seuils x définis par :

$$\mathbb{P}(X \leqslant x) = 0{,}9162 \quad \mathbb{P}(X > x) = 0{,}9418 \quad \mathbb{P}(-x+14 < X < x) = 0{,}9418.$$

3 Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(1,2)$. Déterminer une densité de

$$Y_1 = X^2, \quad Y_2 = \frac{1}{1+X^2} \quad \text{et} \quad Y_3 = \frac{1}{1-X^2}.$$

4 Soient deux variables aléatoires indépendantes : X suivant la loi $\gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ et B prenant uniformément ses valeurs dans $\{-1,1\}$. On pose $Y = \sqrt{X}$ et $Z = BY$.

✎ **1.** Déterminer une densité de Y.

2. a. Déterminer une densité de Z.
Indication. On pourra exprimer la fonction de répartition de Z en considérant le système complet associé à B.

b. Reconnaître la loi de Z et donner sans calcul son espérance et sa variance.

5 **1.** En utilisant la loi normale centrée réduite, montrer que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

✎ **2.** En utilisant une loi normale bien choisie, calculer les intégrales suivantes :

a. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{e}^{-2t^2-4t-2}\,\mathrm{d}t$; **b.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\mathbf{e}^{-2t^2-4t-2}\,\mathrm{d}t$; **c.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\mathbf{e}^{-2t^2-4t-2}\,\mathrm{d}t$.

3. Exprimer les intégrales suivantes à l'aide de la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite puis en donner des valeurs approchées à 10^{-4} près :

a. $\displaystyle\int_0^1 \mathbf{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$; **b.** $\displaystyle\int_0^2 \mathbf{e}^{-2t^2+4t-2}\,\mathrm{d}t$; **c.** $\displaystyle\int_0^{1/2} \mathbf{e}^{-4t^2-4t}\,\mathrm{d}t$.

6 ***Loi du khi-deux***

★ Soit $r \in \mathbb{N}^*$. On appelle loi du χ^2 à r degrés de liberté la loi de la variable 2Z, si Z est une variable aléatoire de loi $\gamma\left(\frac{r}{2}\right)$.

1. Déterminer la densité, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X suivant la loi du χ^2 à r degrés de liberté.

2. a. Montrer que :

$$\forall \lambda > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{e}^{\lambda} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!} + \int_0^{\lambda} \mathbf{e}^{\lambda - t}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{d}t.$$

b. Pour $\lambda > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on considère une variable aléatoire Y_λ suivant la loi de Poisson de paramètre λ ainsi qu'une variable aléatoire X_{2n} suivant la loi du χ^2 à $2n$ degrés de liberté. Montrer que $\mathbb{P}(X_{2n} > 2\lambda) = \mathbb{P}(Y_\lambda < n)$.

c. Donner l'allule de la courbe représentative de la fonction de répartition F_6 d'une variable suivant la loi du χ^2 à 6 degrés de liberté. Préciser les valeurs de $F_6(0)$, $F_6(4)$ et $F_6(8)$.

3. Soient $X_1, \dots, X_r$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes gaussiennes centrées réduites.

a. Déterminer la loi de X_1^2.

b. En déduire la loi de $X_1^2 + \cdots + X_r^2$.

c. Tracer sur un même graphe l'allure des fonctions de répartition de deux variables aléatoires, l'une suivant la loi du χ^2 à r degrés de liberté, l'autre la loi du χ^2 à s degrés de liberté où $r < s$.

7 **1.** Si X est une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0,1]$, quelle est la loi de $Y = -\ln X$?

✎ **2.** Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $]0,1]$.

a. Déterminer la loi de la variable $Z_n = \prod_{i=1}^n X_i$.

b. Calculer $\mathbb{E}(Z_n)$.

8 Des voyageurs arrivent de façon aléatoire dans la salle des pas perdus de la gare de Lyon. Pour tout $t > 0$, on suppose que la variable aléatoire N_t, égale au nombre de voyageurs arrivant entre les instants 0 et t, suit une loi de Poisson de paramètre αt, où $\alpha > 0$ est un paramètre donné.

1. On note X_1 l'instant d'arrivée du premier voyageur.

a. Déterminer $\mathbb{P}(X_1 > t)$ pour $t > 0$ et reconnaître la loi de X_1.

b. Donner sans calcul l'espérance et la variance de X_1.

2. Pour $n \geqslant 2$, on considère la variable aléatoire X_n égale à l'instant d'arrivée du n-ième voyageur.

a. Montrer que la fonction de répartition F_{X_n} de X_n est donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_{X_n}(t) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)\left(1 - \mathbf{e}^{-\alpha t}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\alpha t)^k}{k!}\right).$$

b. En déduire une densité f_n de X_n. Reconnaître la loi de X_n.

c. En déduire l'espérance et la variance de X_n.

9 À l'instant $t = 0$, un piéton se trouve au bord d'une route à sens unique qu'il désire traverser.
On note T_1 la variable aléatoire égale au temps qui s'écoule entre le début de l'expérience et le passage de la première voiture puis, plus généralement, pour tout $i \geqslant 2$, T_i la durée entre le passage de la $i-1$-ième voiture et de la i-ième voiture. On suppose que les T_i, $i \geqslant 1$, sont mutuellement indépendantes et suivent une même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
Prudent, le piéton décide de ne traverser à l'instant t que si la prochaine voiture à passer est éloignée de lui d'une distance supérieure à une certaine distance de sécurité. Le temps nécessaire à un voiture pour parcourir cette distance de sécurité est noté a (toutes les voitures sont supposées rouler à la même vitesse).
On note X la variable aléatoire égale à l'instant où le piéton peut traverser la route pour la première fois. On note N le nombre de voitures qui passeront devant le piéton avant que celui-ci puisse traverser.
On pose $p = \mathbf{e}^{-\lambda a}$ et $q = 1 - p$.

1. **a.** Exprimer les probabilités $\mathbb{P}(X = 0)$ et $\mathbb{P}(N = 0)$ en fonction de p.
   b. Pour $n \geqslant 1$, déterminer $\mathbb{P}(T_1 \leqslant a, \dots, T_n \leqslant a, T_{n+1} > a)$ en fonction de p. En déduire la loi de N.
   c. Soit $n \geqslant 1$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, déterminer une densité pour la loi de T_i conditionnellement à l'événement $[N = n]$.
2. **a.** Déterminer l'espérance $\mathbb{E}(T_i \,|\, N = n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $i \in [\![1, n]\!]$.
   b. Calculer l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(X \,|\, N = n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
   c. En déduire l'espérance de X en fonction de a.

10 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi normale centrée réduite. On pose $Z = \max(X, Y)$.

1. Rappeler l'expression d'une densité f commune à X et Y. On note Φ la fonction de répartition associée.
2. Déterminer une densité pour la variable aléatoire Z.
3. À l'aide d'une intégration par parties, justifier que Z admet une espérance que l'on calculera.
4. Montrer que X^2 et Z^2 ont même loi. En déduire la variance de Z.

11 Une puce se déplace dans $\mathbb{R}^3$ rapporté à un repère $(O; e_1, e_2, e_3)$. À l'instant 0, elle se trouve à l'origine $O = (0, 0, 0)$. À tout instant $n \in \mathbb{N}^*$, elle effectue un déplacement $D_n = (D_{n,1}, D_{n,2}, D_{n,3})$. On suppose que les trois variables aléatoires $D_{n,1}$, $D_{n,2}$ et $D_{n,3}$ sont indépendantes et suivent la même loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. On suppose de plus que tous les déplacements sont indépendants.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_{n,i} = \sum_{k=1}^{n} D_{k,i}$ pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$ et $S_n = (S_{n,1}, S_{n,2}, S_{n,3})$.
On s'intéresse à l'événement $A_n = \big[S_n \in [-1, 1]^3\big]$.

1. **a.** Déterminer la loi de $S_{n,1}$.
   b. Exprimer la probabilité $p_n = \mathbb{P}(|S_{n,1}| \leqslant 1)$ à l'aide de la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite. Grâce à un développement limité de Φ, donner un équivalent de p_n lorsque $n \to \infty$.
   c. Déterminer un équivalent de $\mathbb{P}(A_n)$ lorsque $n \to \infty$.
2. **a.** Montrer que :
$$\forall n, m \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}\Big(\bigcup_{k=n}^{m+n} A_k\Big) \leqslant \sum_{k=n}^{n+m} \mathbb{P}(A_k).$$
   b. En déduire
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcup_{k\geqslant n} A_k\Big).$$
   c. Déterminer
$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{n\geqslant 1} \bigcup_{k\geqslant n} A_k\Big).$$
3. Qu'en déduire concernant le déplacement de la puce ?

12 Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \qquad \text{et} \qquad U_n = \min(X_1, \dots, X_n).$$

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que U_n suit une loi exponentielle et en préciser le paramètre.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, donner une densité de S_n puis montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \mathbb{P}(S_n > x) = \mathbf{e}^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!}.$$
3. On considère une variable aléatoire N, définie sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ que les X_n, $n \in \mathbb{N}$, et suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On suppose les variables N et X_n, $n \in \mathbb{N}^*$, mutuellement indépendantes.
On considère les variables aléatoires $S = S_N$ et $U = U_N$ définies, pour tout $\omega \in \Omega$, par :
$$S(\omega) = S_{N(\omega)}(\omega) \qquad \text{et} \qquad U(\omega) = U_{N(\omega)}(\omega).$$
   a. Démontrer que U est une variable à densité dont on précisera une densité.
   b. Déterminer la fonction de répartition de S. En déduire la loi de S et montrer que $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(X_1)\,\mathbb{E}(N)$.