

Travaux dirigés
Lois continues classiques

ECS2 – Lycée La Bruyère, Versailles

Année 2017/2018

www.rbd.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 1 / 1

Exercice 1 Q 1

Exercice 1

Question 1

Par lecture directe dans la table de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$, on obtient :

$$P(X \leq 1,63) = \Phi(1,63) \simeq 0,9484.$$

Comme X est à densité, on en déduit que :

$$P(X < 1,63) = P(X \leq 1,63) \simeq 0,9484.$$

Puis :

$$P(X \leq -1,41) = \Phi(-1,41) = 1 - \Phi(1,41) \simeq 1 - 0,9207 \simeq 0,0793.$$

Sur le même principe,

$$P(X \geq -1,52) = 1 - P(X < -1,52) = 1 - \Phi(-1,52) = \Phi(1,52) \simeq 0,9357.$$

www.rbd.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 2 / 1

Exercice 1 Q 1

Enfin,

$$P(1,536 \leq X < 1,624) = P(X < 1,624) - P(X \leq 1,536) = \Phi(1,624) - \Phi(1,536).$$

Pour calculer chacune des valeurs de Φ , on utilise une interpolation linéaire (on approche Φ par une fonction affine sur le segment $[1,62; 1,63]$) :

$$\begin{aligned} \Phi(1,624) &= \Phi(1,62 + 0,4 \cdot (1,63 - 1,62)) \\ &\simeq \Phi(1,62) + 0,4 \cdot (\Phi(1,63) - \Phi(1,62)) \\ &\simeq 0,9474 + 0,4 \cdot (0,9484 - 0,9474) \simeq 0,9478. \end{aligned}$$

On obtient de même :

$$\begin{aligned} \Phi(1,536) &= \Phi(1,53 + 0,6 \cdot (1,54 - 1,53)) \\ &\simeq \Phi(1,53) + 0,6 \cdot (\Phi(1,54) - \Phi(1,53)) \simeq 0,9377 \end{aligned}$$

d'où finalement :

$$P(1,536 \leq X < 1,624) \simeq 0,9478 - 0,9377 \simeq 0,0101.$$

www.rbd.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 3 / 1

Exercice 1 Q 2

Exercice 1

Question 2

Toujours par lecture dans la table de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$, on obtient :

$$P(X \leq 1,61) = \Phi(1,61) \simeq 0,9463.$$

Sur le même principe,

$$0,0537 = 1 - 0,9463 = 1 - \Phi(1,61) = \Phi(-1,61) = P(X \leq -1,61).$$

Enfin, par interpolation linéaire,

$$\begin{aligned} 0,4844 &= 1 - 0,5156 = 1 - [\Phi(0,03) + 0,9 \cdot (\Phi(0,04) - \Phi(0,03))] \\ &\simeq 1 - \Phi(0,03) + 0,9 \cdot (0,04 - 0,03) \simeq 1 - \Phi(0,039) \\ &\simeq \Phi(-0,039) \simeq P(X \leq -0,039). \end{aligned}$$

www.rbd.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 4 / 1

Exercice 1 Q 2

Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$P(|X| \leq x) = P(-x \leq X \leq x) = \Phi(x) - \Phi(-x) = 2\Phi(x) - 1.$$

Ainsi

$$P(|X| \leq x) = 0,4844 \iff \Phi(x) = \frac{1 + 0,4844}{2} = 0,7422$$

si bien que $P(|X| \leq 0,65) \simeq 0,4844$.

www.rbd.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 5 / 1

Exercice 2 Q 1

Exercice 2

Question 1

Si X suit la loi normale $\mathcal{N}(7, 4^2)$, alors sa transformée affine $Y = \frac{X-7}{4}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. Pour les calculs de probabilités demandés, on exprime l'événement en fonction de Y et on procède ensuite comme dans l'exercice 1. Par exemple,

$$P(X < 7) = P(Y < 0) = \Phi(0) = \frac{1}{2}.$$

De même,

$$P(X \leq 12,12) = P(Y \leq 1,28) = \Phi(1,28) \simeq 0,8997.$$

Par approximation linéaire,

$$\begin{aligned} P(X \leq 8,26) &= P(Y < 0,315) = \Phi(0,315) \\ &\simeq \Phi(0,31) + 0,5 \cdot (\Phi(0,32) - \Phi(0,31)) \simeq 0,6236. \end{aligned}$$

www.rbd.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 6 / 1

Exercice 2 Q 1

Enfin,

$$\begin{aligned} P(5,25 < X \leq 9,13) &= P(-0,4375 < Y \leq 0,5325) \\ &= P(Y \leq 0,5325) - P(Y \leq -0,4375) \\ &= \Phi(0,5325) - \Phi(-0,4375) = \Phi(0,5325) - 1 + \Phi(0,4375) \end{aligned}$$

où, par interpolation linéaire,

$$\Phi(0,5325) \simeq \Phi(0,53) + 0,25 \cdot (\Phi(0,54) - \Phi(0,53)) \simeq 0,7028$$

et

$$\Phi(0,4375) \simeq \Phi(0,43) + 0,75 \cdot (\Phi(0,44) - \Phi(0,43)) \simeq 0,6691$$

si bien que

$$P(5,25 < X \leq 9,13) \simeq 0,3719.$$

www.rbd.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 7 / 1

Exercice 2 Q 2

Exercice 2

Question 2

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$P(X \leq x) = P\left(Y \leq \frac{x-7}{4}\right) = \Phi\left(\frac{x-7}{4}\right).$$

Pour avoir $P(X \leq x) \simeq 0,0162$, il suffit donc de prendre x tel que $\frac{x-7}{4} = 1,38$ c'est-à-dire $x = 12,52$. De même,

$$P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - \Phi\left(\frac{x-7}{4}\right) = \Phi\left(\frac{7-x}{4}\right)$$

et l'on aura donc $P(X > x) \simeq 0,9418$ pour x tel que $\frac{7-x}{4} = 1,57$ c'est-à-dire $x = 0,72$.

www.rbd.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 8 / 1

Exercice 2 Q 2

On a, pour $x > 7$,

$$\mathbb{P}(-x + 14 < X < x) = \mathbb{P}\left(-\frac{x-7}{4} < Y < \frac{x-7}{4}\right) = 2\Phi\left(\frac{x-7}{4}\right) - 1.$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(-x + 14 < X < x) \simeq 0,9418 \iff \Phi\left(\frac{x-7}{4}\right) \simeq 0,9709.$$

Puisque $\Phi(1,89) \simeq 0,9706$ et $\Phi(1,90) \simeq 0,9713$, il suffit par interpolation linéaire de prendre x tel que

$$\frac{x-7}{4} \simeq 1,89 + \frac{3}{7} \cdot (1,90 - 1,89)$$

c'est-à-dire $x \simeq 14,58$.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 9 / 1

Exercice 4 Q 1

Exercice 4

Question 1

La variable X admet pour densité

$$f_X : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}\Gamma(\frac{1}{2})} e^{-x} = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$

Puisque X est presque sûrement positive, la variable $Y = \sqrt{X}$ est bien définie et $\mathbb{P}(Y \leq y) = 0$ pour $y < 0$. Pour $y > 0$:

$$\mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(\sqrt{X} \leq y) = \mathbb{P}(X \leq y^2) = F_X(y^2).$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 10 / 1

Exercice 4 Q 1

La fonction

$$F_Y : y \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ F_X(y^2) & \text{si } y \geq 0 \end{cases}$$

est donc continue sur \mathbb{R} (même en 0 car $F_X(0) = 0$ étant donné que X est presque sûrement positive) et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* (donc sur \mathbb{R} sauf en un nombre fini de points). Ainsi la variable Y est à densité donnée par

$$f_Y : y \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 2yf_X(y^2) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-y^2} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{si } y \leq 0 \end{cases}.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 11 / 1

Exercice 4 Q 2.a

Exercice 4

Question 2.a

Pour $z \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{P}_{[B=1]}(Z \leq z) = \mathbb{P}_{[B=1]}(BY \leq z) = \mathbb{P}_{[B=1]}(Y \leq z)$$

d'où, puisque B et Y sont indépendantes,

$$\mathbb{P}_{[B=1]}(Z \leq z) = \mathbb{P}(Y \leq z) = F_Y(z)$$

et, de même, sachant Y à densité :

$$\mathbb{P}_{[B=-1]}(Z \leq z) = \mathbb{P}_{[B=-1]}(-Y \leq z) = \mathbb{P}(Y \geq -z) = 1 - F_Y(-z).$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 12 / 1

Exercice 4 Q 2.a

En appliquant la formule des probabilités totales au SCE $\{[B = -1], [B = 1]\}$, on obtient donc :

$$\mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}(B = 1) \mathbb{P}_{[B=1]}(Z \leq z) + \mathbb{P}(B = -1) \mathbb{P}_{[B=-1]}(Z \leq z) = \frac{1}{2}(1 + F_Y(z) - F_Y(-z)).$$

La fonction F_Y étant continue sur \mathbb{R} et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* , il en va de même de F_Z si bien que la variable Z est à densité donnée par

$$f_Z : z \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{2}(f_Y(z) + f_Y(-z)) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2}.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 13 / 1

Exercice 4 Q 2.b

Exercice 4

Question 2.b

On a :

$$\forall z \in \mathbb{R}, f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}\right).$$

On reconnaît la densité de la loi $\mathcal{N}(0, (\frac{1}{\sqrt{2}})^2)$. Par théorème, Z admet donc espérance et variance données par :

$$\mathbb{E}(Z) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(Z) = \frac{1}{2}.$$

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 14 / 1

Exercice 5 Q 1

Exercice 5

Question 1

Par définition,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t} dt.$$

Le changement de variable $u \mapsto t = u^2/2$, de classe \mathcal{C}^1 et strictement croissant de $]0, +\infty[$ sur lui-même, donne :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2} \int_0^{+\infty} e^{-u^2/2} du.$$

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite, qui a donc pour densité la fonction

$$f_X : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

On a donc :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{\pi} \int_0^{+\infty} f_X(t) dt = \sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) dt = \sqrt{\pi}$$

par parité de f_X et sachant que f_X est une densité de probabilité.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 15 / 1

Exercice 5 Q 2.a

Exercice 5

Question 2.a

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^{-2x^2-4x-2} = e^{-2(x+1)^2} = \exp\left(-\frac{(x+1)^2}{2(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}\right),$$

ce qui invite à introduire une variable aléatoire X suivant une loi $\mathcal{N}(-1, (\frac{1}{\sqrt{2}})^2)$. Une telle variable admet pour densité

$$f_X : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x+1)^2}{2(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-2x^2-4x-2}.$$

On en déduit la convergence et la valeur de l'intégrale

$$I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2t^2-4t-2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

car f_X est une densité.

www.rhbd.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 16 / 1

Exercice 5 Q 2.b

Exercice 5

Question 2.b

Sur le même principe,

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-2t^2-4t-2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t) dt$$

converge puisque X admet une espérance et vaut

$$I_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \mathbb{E}(X) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 17 / 1

Exercice 5 Q 2.c

Exercice 5

Question 2.c

De même,

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-2t^2-4t-2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_X(t) dt$$

converge puisque X admet une variance et vaut

$$I_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \mathbb{E}(X^2) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\mathbb{V}(X) + \mathbb{E}(X)^2) = \frac{5\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2}}.$$

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 18 / 1

Exercice 5 Q 3.a

Exercice 5

Question 3.a

Soit X_1 une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, ayant donc pour densité

$$f_{X_1} : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

On a :

$$J_1 = \int_0^1 e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi} \int_0^1 f_{X_1}(t) dt = \sqrt{2\pi} \mathbb{P}(0 \leq X_1 \leq 1)$$

$$= \sqrt{2\pi} (\mathbb{P}(X_1 \leq 1) - \mathbb{P}(X_1 \leq 0)) = \sqrt{2\pi} (\Phi(1) - \Phi(0))$$

où $\Phi(0) = \frac{1}{2}$ et, par lecture dans la table de la loi normale centrée réduite, $\Phi(1) \simeq 0,8413$.
Avec $\sqrt{2\pi} \simeq 2,5066$, on en déduit une valeur approchée de $J_1 \simeq 0,8555$.

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 19 / 1

Exercice 5 Q 3.b

Exercice 5

Question 3.b

Soit X_2 une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}(1, (\frac{1}{2})^2)$, de densité

$$f_{X_2} : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-1)^2}{2(\frac{1}{2})^2}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-2x^2+4x-2}.$$

En introduisant $Y_2 = \frac{X_2-1}{1/2}$, transformée affine de X_2 qui suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$, on a :

$$J_2 = \int_0^2 e^{-2t^2+4t-2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 f_{X_2}(t) dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \mathbb{P}(0 \leq X_2 \leq 2)$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \mathbb{P}(-2 \leq Y_2 \leq 2) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\Phi(2) - \Phi(-2))$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}} (2\Phi(2) - 1) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2}} (2 \cdot 0,9772 - 1) \simeq 1,1962.$$

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 20 / 1

Exercice 5 Q 3.c

Exercice 5

Question 3.c

On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^{-4x^2-4x} = \exp\left(-4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 1\right) = e \exp\left(-\frac{(x + \frac{1}{2})^2}{2(\frac{1}{2\sqrt{2}})^2}\right),$$

ce qui conduit à introduire une variable aléatoire X_3 de loi $\mathcal{N}(-\frac{1}{2}, (\frac{1}{2\sqrt{2}})^2)$, de densité

$$f_{X_3} : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x + \frac{1}{2})^2}{2(\frac{1}{2\sqrt{2}})^2}\right) = e^{-1} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-4x^2-4x}.$$

En introduisant $Y_3 = \frac{X_3 + \frac{1}{2}}{1/(2\sqrt{2})}$, transformée affine de X_3 qui suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$, on a :

$$J_3 = \int_0^{1/2} e^{-4t^2-4t} dt = e \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^{1/2} f_{X_3}(t) dt = e \frac{\sqrt{\pi}}{2} \mathbb{P}\left(0 \leq X_3 \leq \frac{1}{2}\right)$$

$$= e \frac{\sqrt{\pi}}{2} \mathbb{P}\left(\sqrt{2} \leq Y_3 \leq 2\sqrt{2}\right) = e \frac{\sqrt{\pi}}{2} (\Phi(2\sqrt{2}) - \Phi(\sqrt{2})).$$

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 21 / 1

Exercice 5 Q 3.c

Par interpolation linéaire, on obtient :

$$\Phi(\sqrt{2}) \simeq \Phi(1,414) \simeq \Phi(1,41) + 0,4 \cdot (\Phi(1,42) - \Phi(1,41)) \simeq 0,9213$$

et l'on peut considérer (vu la proximité des valeurs de $\Phi(2,82)$ et $\Phi(2,83)$) que

$$\Phi(2\sqrt{2}) \simeq \Phi(2,828) \simeq \Phi(2,83) \simeq 0,9977.$$

On obtient ainsi :

$$J_3 \simeq 0,1840.$$

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 22 / 1

Exercice 6 Q 1

Exercice 6

Question 1

Par définition, la variable $Z = \frac{X}{2}$ admet pour densité

$$f_Z : z \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \frac{z^{r/2-1}}{\Gamma(\frac{r}{2})} e^{-z} & \text{si } z > 0 \\ 0 & \text{si } z \leq 0 \end{cases}.$$

Dans ces conditions, $X = 2Z$ admet pour densité

$$f_X : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{2} f_Z\left(\frac{x}{2}\right) = \begin{cases} \frac{x^{r/2-1}}{2\Gamma(\frac{r}{2})} e^{-x/2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$

Par théorème, Z admet une espérance et une variance égales à :

$$\mathbb{E}(Z) = \frac{r}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(Z) = \frac{r}{2}.$$

Il en va donc de même de $X = 2Z$:

$$\mathbb{E}(X) = 2\mathbb{E}(Z) = r \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = 2^2 \mathbb{V}(Z) = 4r.$$

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 23 / 1

Exercice 6 Q 2.a

Exercice 6

Question 2.a

La formule de Taylor avec reste intégral s'applique à une fonction f de classe \mathcal{C}^n sur un intervalle $[a, b]$:

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt.$$

Appliquée à la fonction exp sur le segment $[0, \lambda]$, elle s'écrit :

$$e^\lambda = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \lambda^k + \int_0^\lambda \frac{(\lambda-t)^{n-1}}{(n-1)!} e^t dt.$$

Le changement de variable $u = \lambda - t$ dans l'intégrale donne alors :

$$e^\lambda = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!} + \int_0^\lambda \frac{u^{n-1}}{(n-1)!} e^{\lambda-u} du.$$

www.rhfd.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 24 / 1

Exercice 6
Question 2.b

D'après la question a., la variable X_{2n} a pour densité

$$f_{X_{2n}} : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2(n-1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} e^{-x/2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Par suite :

$$\mathbb{P}(X_{2n} > 2\lambda) = 1 - \int_0^{2\lambda} f_{X_{2n}}(t) dt = 1 - \int_0^{2\lambda} \frac{1}{2(n-1)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{n-1} e^{-t/2} dt.$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 25 / 1

Exercice 6 Q 2.b

Par changement de variable $u = t/2$ dans l'intégrale, on en déduit d'après la question précédente :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{2n} > 2\lambda) &= 1 - \int_0^\lambda \frac{u^{n-1}}{(n-1)!} e^{-u} du \\ &= e^{-\lambda} \left(e^\lambda - \int_0^\lambda \frac{u^{n-1}}{(n-1)!} e^{\lambda-u} du \right) \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!} = \mathbb{P}(Y_\lambda < n). \end{aligned}$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 26 / 1

Exercice 6
Question 2.c

On a tout d'abord $F_6(0) = 0$ car X_3 prend presque sûrement des valeurs positives. Puis la question précédente donne les valeurs approchées :

$$F_6(4) = 1 - \mathbb{P}(X_6 > 4) = 1 - \mathbb{P}(Y_2 < 3) = 1 - e^{-2} \sum_{k=0}^2 \frac{2^k}{k!} \approx 0,3233$$

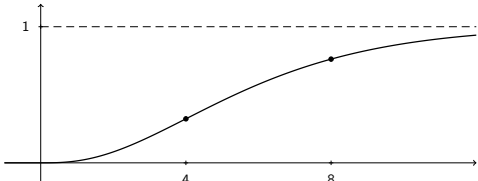
ainsi que

$$F_6(8) = 1 - \mathbb{P}(X_6 > 8) = 1 - \mathbb{P}(Y_4 < 3) = 1 - e^{-4} \sum_{k=0}^2 \frac{4^k}{k!} \approx 0,7619$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 27 / 1

Exercice 6 Q 2.c

En tant que fonction de répartition, la fonction F_6 est croissante et son graphe présente les asymptotes horizontales $y = 0$ en $-\infty$ et $y = 1$ en $+\infty$. La tangente à l'origine est horizontale car $F_6'(0) = 0$. Les valeurs de $F_6(0)$, $F_6(4)$ et $F_6(8)$ permettent de situer le graphe.



www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 28 / 1

Exercice 6
Question 3.a

D'après un calcul effectué dans l'exercice 10 question 4., la variable X^2 admet pour fonction de répartition

$$F_{X^2} : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 2\Phi(\sqrt{x}) - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Cette fonction F_{X^2} est continue sur \mathbb{R} (même en 0) et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* si bien que X^2 est une variable à densité donnée par :

$$f_{X^2} : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} \phi(\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-x/2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On reconnaît la densité de la loi $\chi^2(1)$.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 29 / 1

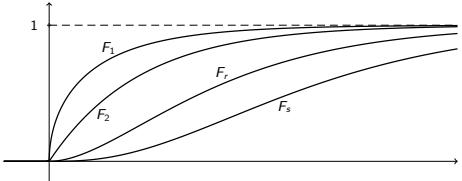
Exercice 6
Question 3.b

Les variables X_1, \dots, X_n étant mutuellement indépendantes, il en va de même des variables $\frac{1}{2}X_1^2, \dots, \frac{1}{2}X_n^2$ qui suivent toutes une loi $\gamma(\frac{1}{2})$ d'après la question précédente. Par théorème, leur somme $\frac{1}{2}(X_1^2 + \dots + X_n^2)$ suit dans ces conditions la loi $\gamma(\frac{n}{2})$, ce qui signifie que la variable $X_1^2 + \dots + X_n^2$ suit la loi $\chi^2(n)$.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 30 / 1

Exercice 6
Question 3.c

Soient F_r et F_s les fonctions de répartition des lois $\chi^2(r)$ et $\chi^2(s)$. Puisque $X_1^2 + \dots + X_r^2 \leq X_1^2 + \dots + X_s^2$, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, F_s(t) = \mathbb{P}(X_1^2 + \dots + X_s^2 \leq t) \leq \mathbb{P}(X_1^2 + \dots + X_r^2 \leq t) = F_r(t).$$


On notera que le graphe de F_1 présente une demi-tangente verticale à l'origine, celui de F_2 une demi-tangente oblique et les autres une tangente horizontale.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 31 / 1

Exercice 7
Question 1

On rappelle que X admet pour fonction de répartition

$$F_X : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

On observe tout d'abord que Y est bien définie (et presque sûrement positive). Pour $y \in \mathbb{R}$, sachant X à densité,

$$\mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(-\ln X \leq y) = \mathbb{P}(X \geq e^{-y}) = 1 - F_X(e^{-y}).$$

Ainsi Y a pour fonction de répartition

$$F_Y : y \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ 1 - e^{-y} & \text{si } y \geq 0 \end{cases}$$

donc suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 32 / 1

Exercice 7 Q 2.a

Exercice 7

Question 2.a

Les variables $Y_i = -\ln X_i$, $1 \leq i \leq n$, sont indépendantes et suivent toutes, d'après la question 1., la loi exponentielle $\mathcal{E}(1) = \gamma(1)$. Par théorème, leur somme $Y_1 + \dots + Y_n = -\ln Z_n = T_n$ suit alors la loi $\gamma(n)$, i.e. admet pour densité

$$g_n : t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-t} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 33 / 1

Exercice 7 Q 2.a

La loi de $Z_n = e^{-T_n}$ s'en déduit : puisque $Z_n > 0$, on a $\mathbb{P}(Z_n \leq z) = 0$ pour $z \leq 0$, alors que pour $z > 0$,

$$\mathbb{P}(Z_n \leq z) = \mathbb{P}(T_n \geq -\ln z) = 1 - F_{T_n}(-\ln z).$$

La variable Z_n admet donc pour fonction de répartition

$$F_{Z_n} : z \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } z \leq 0 \\ 1 - F_{T_n}(-\ln z) & \text{si } z > 0 \end{cases}$$

Cette fonction est continue sur \mathbb{R} (même en 0 car $\lim_{+\infty} F_{T_n} = 1$) et de classe \mathcal{C}^1 sur $] -\infty, 0[$ et $] 0, +\infty[$. La variable Z_n est donc à densité

$$f_n : z \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } z \leq 0 \\ \frac{1}{z} g_n(-\ln z) & \text{si } z > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } z \leq 0 \\ \frac{(-\ln z)^{n-1}}{(n-1)!} & \text{si } 0 < z < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 34 / 1

Exercice 7 Q 2.b

Exercice 7

Question 2.b

Les variables X_1, \dots, X_n étant indépendantes et admettant chacune une espérance, leur produit $Z_n = X_1 \cdots X_n$ admet par théorème une espérance donnée par :

$$\mathbb{E}(Z_n) = \mathbb{E}(X_1 \cdots X_n) = \mathbb{E}(X_1) \cdots \mathbb{E}(X_n) = \frac{1}{2^n}.$$

Remarque. Le résultat peut être établi par un calcul direct. D'après le théorème de transfert, $\mathbb{E}(Z_n)$ existe car l'intégrale ci-dessous converge absolument par changement de variable affine $u = 2t$ puis comparaison aux intégrales Γ :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_n) &= \mathbb{E}(e^{-T_n}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t} g_n(t) dt = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-2t} dt \\ &= \frac{1}{2(n-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{u^{n-1}}{2^{n-1}} e^{-u} du = \frac{1}{2^n(n-1)!} \Gamma(n) = \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 35 / 1

Exercice 9 Q 1.a

Exercice 9

Question 1.a

L'événement $[X = 0]$ est réalisé si, et seulement si, le piéton peut traverser avant le passage de la première voiture c'est-à-dire si, et seulement si, la première voiture passe après un temps a . Ainsi $[X = 0] = [T_1 > a]$ et, puisque T_1 suit une loi exponentielle de paramètre λ ,

$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(T_1 > a) = 1 - F_{T_1}(a) = e^{-\lambda a} = p.$$

De même l'événement $[N = 0]$ est réalisé si, et seulement si, le piéton peut traverser avant le passage de la première voiture d'où $[N = 0] = [X = 0]$ et

$$\mathbb{P}(N = 0) = \mathbb{P}(X = 0) = p.$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 36 / 1

Exercice 9 Q 1.b

Exercice 9

Question 1.b

Par indépendance mutuelle des variables T_1, \dots, T_n, T_{n+1} , il vient :

$$\mathbb{P}(T_1 \leq a, \dots, T_n \leq a, T_{n+1} > a) = \mathbb{P}(T_1 \leq a) \cdots \mathbb{P}(T_n \leq a) \mathbb{P}(T_{n+1} > a) = q^n p.$$

Concernant la variable aléatoire N , elle prend ses valeurs dans \mathbb{N} (donc est discrète) et, pour $n \in \mathbb{N}$ donné, l'événement $[N = n]$ est réalisé si, et seulement si, les n premières voitures se succèdent à des intervalles de temps inférieurs à a alors que la $n+1$ -ième suit la n -ième d'un intervalle de temps supérieur à a . En d'autres termes,

$$[N = n] = [T_1 \leq a] \cap \cdots \cap [T_n \leq a] \cap [T_{n+1} > a] \quad (*)$$

d'où

$$\mathbb{P}(N = n) = q^n p.$$

Ainsi la variable aléatoire N suit une loi géométrique décalée.

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 37 / 1

Exercice 9 Q 1.c

Exercice 9

Question 1.c

On détermine la fonction de répartition de la variable T_j pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}_{[N=n]}$. Pour $t \in]0, a[$, en exprimant $[N = n]$ sous la forme $(*)$, on obtient

$$\mathbb{P}_{[N=n]}(T_j \leq t) = \frac{\mathbb{P}([N = n] \cap [T_j \leq t])}{\mathbb{P}(N = n)} = \frac{\mathbb{P}(T_j \leq t)}{\mathbb{P}(T_j \leq a)} = \frac{1 - e^{-\lambda t}}{1 - e^{-\lambda a}}$$

par indépendance des variables T_1, \dots, T_{n+1} . Finalement,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}_{[N=n]}(T_j \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \frac{1 - e^{-\lambda t}}{1 - e^{-\lambda a}} & \text{si } 0 < t < a \\ 1 & \text{si } t \geq a \end{cases}$$

Cette fonction est continue sur \mathbb{R} (même en 0 et en a) et de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{0, a\}$ donc, pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}_{[N=n]}$, la variable aléatoire T_j est à densité donnée par

$$f_n : t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{1 - e^{-\lambda a}} & \text{si } 0 < t < a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 38 / 1

Exercice 9 Q 2.a

Exercice 9

Question 1.b

Pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}_{[N=n]}$, la variable T_i est presque sûrement bornée car à valeurs dans $[0, a]$. Elle admet donc une espérance donnée par :

$$\mathbb{E}(T_i | N = n) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_n(t) dt = \frac{1 - (1 + \lambda a) e^{-\lambda a}}{\lambda(1 - e^{-\lambda a})}.$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 39 / 1

Exercice 9 Q 2.b

Exercice 9

Question 2.b

Pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}_{[N=n]}$, on a presque sûrement $X = T_1 + \dots + T_n$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X | N = n) &= \mathbb{E}(T_1 + \dots + T_n | N = n) \\ &= \mathbb{E}(T_1 | N = n) + \dots + \mathbb{E}(T_n | N = n) \\ &= n \frac{1 - (1 + \lambda a) e^{-\lambda a}}{\lambda(1 - e^{-\lambda a})}. \end{aligned}$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 40 / 1

Exercice 9 Q 2.c

Exercice 9

Question 2.c

En admettant que la formule de l'espérance totale s'applique dans cette situation (la variable X n'est pas discrète mais la série de droite converge absolument) :

$$E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n) E(X | N = n) = \frac{1 - (1 + \lambda a)e^{-\lambda a}}{\lambda e^{-\lambda a}}.$$

Étudier les limites de cette expression lorsque $a \rightarrow 0$, $a \rightarrow +\infty$, $\lambda \rightarrow +\infty$, $\lambda \rightarrow 0$; est-ce cohérent ?

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 41 / 1

Exercice 10 Q 1

Exercice 10

Question 1

Par définition, X a pour densité

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Cette fonction étant continue, la fonction

$$\Phi : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 42 / 1

Exercice 10 Q 2

Exercice 10

Question 2

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a par indépendance de X et Y :

$$\begin{aligned} P(Z \leq x) &= P(\max(X, Y) \leq x) \\ &= P(X \leq x, Y \leq x) \\ &= P(X \leq x) P(Y \leq x) = \Phi(x)^2. \end{aligned}$$

La fonction de répartition de Z est ainsi de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et la variable Z à densité donnée par

$$f_Z : x \in \mathbb{R} \mapsto 2f(x)\Phi(x).$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 43 / 1

Exercice 10 Q 3

Exercice 10

Question 3

La variable Z admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tf_Z(t) dt$ est convergente. Or, par intégration par parties :

$$\int tf_Z(t) dt = -2f(t)\Phi(t) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Phi(\sqrt{2} \cdot t) + k.$$

La primitive G obtenue pour $k = 0$ admet des limites finies en $-\infty$ et $+\infty$ si bien que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tf_Z(t) dt$ converge avec :

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf_Z(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} G(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 44 / 1

Exercice 10 Q 4

Exercice 10

Question 4

Les variables aléatoires X^2 et Z^2 ont même fonction de répartition donnée par

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2\Phi(\sqrt{x}) - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

Comme la fonction de répartition caractérise la loi, X^2 et Z^2 ont donc même loi. On a donc :

$$E(Z^2) = E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = 1$$

d'où

$$V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = 1 - \frac{1}{\pi}.$$

www.ibid.fr Travaux dirigés Année 2017/2018 45 / 1