Travaux dirigés

Fonctions de plusieurs variables : continuité

ECS2 – Lycée La Bruyère, Versailles

Année 2017/2018

Exercice 2

Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par U. Puisque U est non vide, il existe $A \in U$ et comme U est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(A,r) \subset U \subset F$. On conjecture que $F = \mathbb{R}^n$.

Cas particulier où $A = 0$.
Pour $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $Y = \frac{r}{2\|X\|}X$, on a

$$\|Y\| = \frac{r}{2\|X\|}\|X\| = \frac{r}{2} < r$$

donc $Y \in B(0,r) \subset F$. Par suite, $X = \frac{2\|X\|}{r}Y$ appartient au sous-espace vectoriel F et l'on a donc justifié que $F = \mathbb{R}^n$ (puisque bien sûr $0 \in F$).

Cas général. On cherche à se ramener au cas précédent en montrant qu'on peut supposer $A = 0$.
On montre pour cela l'inclusion $B(0,r) \subset F$. Soit donc $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|X\| < r$.
On a $Y = A + X \in B(A,r) \subset F$ donc, puisque F est un sous-espace vectoriel, $X = (A+X) - A \in F$.

Exercice 7

Question 1

On a pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$|f(x,y)| = \frac{|x^3+y^3|}{x^2+y^2} \leqslant \frac{|x|^3+|y|^3}{\|(x,y)\|^2}$$

$$\leqslant \frac{2\|(x,y)\|^3}{\|(x,y)\|^2} = 2\|(x,y)\| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

d'où l'on déduit que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

Exercice 7

Question 2

On a pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$|f(x,y)| = \frac{|xy|}{x^2+y^2}|\sin(x+y)| = \frac{|x|\,|y|}{\|(x,y)\|^2}|\sin(x+y)|$$

$$\leqslant \frac{\|(x,y)\|^2}{\|(x,y)\|^2}|\sin(x+y)| = |\sin(x+y)| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

d'où l'on déduit que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

Exercice 7

Question 3

On observe que f n'admet pas la même limite en $(0,0)$ le long de deux chemins :

$$\gamma_1(t) = (t,0) \xrightarrow[t\to 0]{} (0,0) \quad \text{et} \quad f\big(\gamma_1(t)\big) = 0 \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$

alors que

$$\gamma_2(t) = (t,t) \xrightarrow[t\to 0]{} (0,0) \quad \text{et} \quad f\big(\gamma_2(t)\big) = \frac{t^2}{2t^2} \xrightarrow[t\to 0]{} \frac{1}{2},$$

ce qui exclut l'existence d'une limite finie pour f en $(0,0)$.

On montre de même que

$$g : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longmapsto \frac{y^2}{x^2+y^2}$$

n'admet pas de limite en $(0,0)$. En effet, elle n'admet pas la même limite en $(0,0)$ le long de deux chemins :

$$\gamma_1(t) = (t,0) \xrightarrow[t\to 0]{} (0,0) \quad \text{et} \quad g\big(\gamma_1(t)\big) = 0 \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$

alors que

$$\gamma_3(t) = (0,t) \xrightarrow[t\to 0]{} (0,0) \quad \text{et} \quad g\big(\gamma_3(t)\big) = \frac{t^2}{t^2} \xrightarrow[t\to 0]{} 1.$$

On observe néanmoins sur cet exemple que les limites ci-dessous existent mais sont distinctes

$$\lim_{x\to 0}\Big(\lim_{y\to 0} g(x,y)\Big) \quad \text{et} \quad \lim_{y\to 0}\Big(\lim_{x\to 0} g(x,y)\Big).$$

On retiendra que $(x,y) \to (x_0,y_0)$ ne revient pas à $x \to x_0$ *puis* $y \to y_0$ (ou l'inverse), mais à $x \to x_0$ et $y \to y_0$ simultanément.

Exercice 7

Question 4

Première méthode

On a :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \quad f(x,y) = \frac{x(\sin y - y) - y(\sin x - x)}{x^2+y^2}.$$

Puis l'inégalité de Taylor-Lagrange donne :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |\sin t - t| \leqslant \frac{t^2}{2}.$$

Par suite,

$$|f(x,y)| \leqslant \frac{|x|\,|\sin y - y| + |y|\,|\sin x - x|}{\|(x,y)\|^2} \leqslant \frac{|x|\,y^2 + |y|\,x^2}{2\|(x,y)\|^2} \leqslant \|(x,y)\|$$

avec un majorant qui tend vers 0 lorsque $(x,y) \to (0,0)$, d'où :

$$f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0.$$

Deuxième méthode

Le développement limité du sinus en 0 à l'ordre 1 s'écrit

$$\sin t = t + t\varepsilon(t) \quad \text{où} \quad \varepsilon(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0.$$

Par suite, pour $(x,y) \to (0,0)$, $(x,y) \neq (0,0)$,

$$f(x,y) = \frac{x\big(y + y\varepsilon(y)\big) - y\big(x + x\varepsilon(x)\big)}{x^2+y^2} = \frac{xy\varepsilon(y) - xy\varepsilon(x)}{x^2+y^2}$$

d'où

$$|f(x,y)| \leqslant \frac{|xy|}{x^2+y^2}\big(|\varepsilon(x)| + |\varepsilon(y)|\big) \leqslant \frac{1}{2}\big(|\varepsilon(x)| + |\varepsilon(y)|\big) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

par composition des limites[1].
Il en résulte que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

1. Mieux vaudrait dire, pour respecter le programme, par composition des fonctions continues après avoir posé $\varepsilon(0) = 0$ pour rendre ε continue en 0.

Exercice 8

Question 1

La fonction f est tout d'abord continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par opérations sur les fonctions continues.
Par ailleurs, on a pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$|f(x,y)| = |x| \frac{|y|}{|x|+|y|} \leqslant |x| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

d'où

$$f(x,y) \xrightarrow[\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}]{} 0 = f(0,0)$$

et f est continue en $(0,0)$.
En conclusion, f est donc continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 8

Question 2

Tout d'abord, la fonction f est continue en tout point de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ par opérations sur les fonctions continues.
Il reste à étudier la continuité de f en un point de la forme $(x_0, 0)$ avec $x_0 \in \mathbb{R}$.
Or, pour tout $y \neq 0$,

$$|f(x,y)| = \left|y\mathrm{e}^{\arctan(x/y)}\right| \leqslant |y|\,\mathrm{e}^{\pi/2}$$

d'où, l'inégalité étant immédiate lorsque $y = 0$:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x,y)| \leqslant |y|\,\mathrm{e}^{\pi/2} \xrightarrow[(x,y)\to(x_0,0)]{} 0,$$

si bien que

$$f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(x_0,0)]{} 0 = f(x_0,0),$$

d'où l'on déduit que f est continue au point $(x_0, 0)$.
En conclusion, f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 8

Question 3

Méthode 1

Les théorèmes opératoires assurent la continuité de f en tout point (x_0, y_0) tel que $y_0 \neq 0$.
L'équivalent classique du ln conduit à conjecturer que f est également continue en un point de la forme $(x_0, 0)$. Pour le démontrer, on utilise l'inégalité de Taylor-Lagrange qui donne

$$\forall u > 0, \quad |\ln(1+u) - u| \leqslant \frac{u^2}{2}.$$

Par suite, si $y \neq 0$,

$$\begin{aligned}\left|f(x,y) - x_0^2\right| &= \left|\frac{\ln(1+x^2y^2) - x^2y^2}{y^2} + x^2 - x_0^2\right| \\ &\leqslant \frac{\left|\ln(1+x^2y^2) - x^2y^2\right|}{y^2} + \left|x^2 - x_0^2\right| \leqslant \frac{x^4y^2}{2} + \left|x^2 - x_0^2\right|\end{aligned}$$

L'inégalité entre les membres extrémaux étant encore valable pour $y = 0$, on a donc :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \left|f(x,y) - x_0^2\right| \leqslant \frac{x^4y^2}{2} + \left|x^2 - x_0^2\right| \xrightarrow[(x,y)\to(x_0,0)]{} 0,$$

d'où l'on déduit que

$$f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(x_0,0)]{} x_0^2 = f(x_0,0)$$

et f est continue en $(x_0, 0)$. La fonction f est donc continue sur $\mathbb{R}^2$.

Méthode 2

On observe que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x,y) = x^2\varphi(xy)$$

où

$$\varphi : t \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\ln(1+t^2)}{t^2} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}.$$

Comme φ est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$ par opérations sur les fonctions continues.

Exercice 8

Question 4

Tout d'abord, la fonction f est continue en tout point de la forme (x_0, y_0) avec $y_0 \neq 0$, c'est-à-dire sur l'ouvert $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, par opérations sur les fonctions continues. En effet, au voisinage de chacun de ces points, elle a une expression unique de la forme $(x,y) \longmapsto x \ln y$ si $y_0 > 0$ et $(x,y) \longmapsto 0$ si $y_0 < 0$.
Pour $x_0 \neq 0$ et $y_0 = 0$, on a

$$f(x,y) = x \ln y \xrightarrow[\substack{(x,y)\to(x_0,0)\\ y>0}]{} \pm\infty$$

selon le signe de x_0. La fonction f n'admet donc pas de limite au point $(x_0, 0)$ et n'est donc pas continue en ce point.

Concernant le comportement de f au voisinage de $(0,0)$, on observe qu'elle n'y présente pas la même limite le long de deux chemins :

$$\gamma_1(t) = (t,t) \xrightarrow[\substack{t\to0\\t>0}]{} (0,0) \quad \text{et} \quad f(\gamma_1(t)) = t \ln t \xrightarrow[\substack{t\to0\\t>0}]{} 0$$

alors que

$$\gamma_2(t) = (t, \mathrm{e}^{-1/t}) \xrightarrow[\substack{t\to0\\t>0}]{} (0,0) \quad \text{et} \quad f(\gamma_2(t)) = t \ln \mathrm{e}^{-1/t} = -1 \xrightarrow[\substack{t\to0\\t>0}]{} -1,$$

ce qui exclut l'existence d'une limite finie pour f en $(0,0)$. Par suite f n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 9

La fonction

$$g : t \in [0, 2\pi] \longmapsto f(\cos t, \sin t) - f(-\cos t, -\sin t)$$

est continue comme composée de fonctions continues.
Par ailleurs les réels $g(0)$ et $g(\pi)$ sont opposés. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction g s'annule en un point $t_0 \in [0, 2\pi]$, ce qui signifie que $f(M_0) = f(-M_0)$ où $M_0 = (\cos t_0, \sin t_0) \in \mathbb{T}$.

Exercice 10

Il s'agit de montrer que la fonction

$$\varphi : (x, y) \longmapsto f(y) - f(x),$$

qui ne s'annule pas sur sur $\Delta = \{(x, y) \in I^2 : x < y\}$ car f est injective, y garde un signe constant. Or, si $M_0 = (x_0, y_0)$ et $M = (x, y)$ sont deux éléments distincts de Δ, la fonction d'une variable réelle

$$g : t \in [0, 1] \longmapsto \varphi\big((1-t)M_0 + tM\big),$$

bien définie car Δ est convexe, est continue par opérations sur les fonctions continues.
Comme φ, la fonction g ne s'annule pas donc garde un signe constant sur l'intervalle $[0, 1]$ en vertu du théorème des valeurs intermédiaires. Ainsi $\varphi(M_0) = g(0)$ est de même signe que $\varphi(M) = g(1)$.
On a bien démontré que φ garde un signe constant sur Δ : celui de $\varphi(M_0)$, d'où le résultat.

Exercice 12

Question 1.a

Soit $(E_1, \ldots, E_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Pour $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\begin{aligned} \|f(X)\| &= \left\| f\Big(\sum_{i=1}^n x_i E_i\Big) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n x_i f(E_i) \right\| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^n |x_i| \, \|f(E_i)\| \leqslant \Big(\sum_{i=1}^n \|f(E_i)\|\Big) \|X\| = \kappa \|X\| \end{aligned}$$

où

$$\kappa = \sum_{i=1}^n \|f(E_i)\| .$$

Exercice 12

Question 1.b

Soit $A = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Pour $X \in \mathbb{R}^n$, on a d'après l'inégalité triangulaire à gauche et la question **a.** :

$$\begin{aligned} |\varphi(X) - \varphi(A)| &= \big| \|f(X)\| - \|f(A)\| \big| \leqslant \|f(X) - f(A)\| \\ &= \|f(X - A)\| \leqslant \kappa \|X - A\| \xrightarrow[X \to A]{} 0, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit que $\varphi(X)$ tend vers $\varphi(A)$ lorsque $X \to A$ et la fonction φ est donc continue en tout point A de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 12

Question 2

L'ensemble $\operatorname{Ker} f = \varphi^{-1}(\{0\})$ est fermé comme image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application φ, continue d'après la question **1.b.**.

Exercice 12

Question 3

Si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et si G en désigne un supplémentaire dans $\mathbb{R}^n$, alors F peut s'écrire comme le noyau de la projection sur G parallèlement à F. A ce titre, c'est une partie fermée de $\mathbb{R}^n$ d'après **2.**.

Exercice 13

Question 1

On peut noter pour commencer que :

$$\forall (X, Y) \in \mathcal{K}^2, \quad \|f(Y) - f(X)\| \leqslant \|Y - X\| .$$

On considère la fonction

$$\varphi : X \in \mathcal{K} \longmapsto \|f(X) - X\| .$$

Pour $A \in \mathcal{K}$, on a par inégalité triangulaire à l'envers, pour tout $X \in \mathcal{K}$:

$$\begin{aligned} |\varphi(X) - \varphi(A)| &= \big| \|f(X) - X\| - \|f(A) - A\| \big| \leqslant \big\| \big(f(X) - X\big) - \big(f(A) - A\big) \big\| \\ &= \big\| \big(f(X) - f(A)\big) - (X - A) \big\| \leqslant \|f(X) - f(A)\| + \|X - A\| \\ &\leqslant 2 \|X - X_0\| \xrightarrow[X \to X_0]{} 0. \end{aligned}$$

Il en résulte que $\varphi(X)$ tend vers $\varphi(A)$ lorsque $X \to A$ et φ est donc continue en tout point A de $\mathcal{K}$.

Exercice 13

Question 2

Unicité

Si A et B sont deux points fixes distincts, alors

$$\|A - B\| = \|f(A) - f(B)\| < \|A - B\| ,$$

ce qui est absurde.

Existence

La fonction φ, continue sur $\mathcal{K}$, fermé, borné et non vide, y atteint un minimum en un point A. Un tel point A est nécessairement point fixe de f. En effet, si $B = f(A)$ est distinct de A, alors par hypothèse

$$\varphi(B) = \|f(B) - B\| = \|f(B) - f(A)\| < \|B - A\| = \varphi(A),$$

en contradiction avec la définition de A.