Travaux dirigés

Produit scalaire et orthogonalité

ECS2 – Lycée La Bruyère, Versailles

Année 2017/2018

Exercice 1

Question 1

L'application φ est la forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^2$ canoniquement associée à la matrice
$$A_2 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
La matrice A_2 n'étant pas symétrique, la forme φ n'est pas symétrique. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a
$$\varphi((x, y), (x, y)) = 4x^2 + y^2 \geqslant 0$$
et
$$\varphi((x, y), (x, y)) = 0 \implies (x, y) = (0, 0)$$
si bien que φ est définie-positive.

La matrice de φ dans la base canonique $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ s'obtient par le calcul des $\varphi(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$: on retrouve
$$A_2 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Le calcul de la matrice de φ en base (e_1, e_2) peut se faire directement par celui des $\varphi(e_i, e_j)$:
$$B_2 = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$
ou en utilisant la formule de changement de base : à partir de la matrice de passage
$$P = \mathrm{Pass}((\varepsilon_1, \varepsilon_2) \to (e_1, e_2)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$
on obtient la matrice de φ en base (e_1, e_2) :
$$B_2 = {}^tPA_2P = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1

Question 2

L'application ψ est la forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^3$ canoniquement associée à la matrice
$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
La matrice A_3 étant symétrique, la forme ψ est symétrique. Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a
$$\begin{aligned}\psi((x, y, z), (x, y, z)) &= x^2 + 5y^2 + z^2 - 2xy + 4yz \\ &= (x - y)^2 + (2y + z)^2 \geqslant 0\end{aligned}$$
et
$$\psi((x, y, z), (x, y, z)) = 0 \iff \begin{cases} x - y = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \iff (x, y, z) = y(1, 1, -2)$$
si bien que ψ est positive mais pas définie-positive : $\psi((1, 1, -2), (1, 1, -2)) = 0$ alors que $(1, 1, -2) \neq 0$.

La forme bilinéaire ψ est représentée en base canonique par la matrice
$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
On obtient la matrice B_3 représentative de ψ en base (e_1, e_2, e_3) par calcul direct des $\psi(e_i, e_j)$ ou par application de la formule de changement de base : à partir de la matrice de passage
$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
de passage de la base canonique vers la base (e_1, e_2, e_3), le calcul donne :
$$B_3 = {}^tQA_3Q = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 7 \\ 0 & 7 & 10 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

Il s'agit de trouver une forme bilinéaire symétrique définie-positive ψ telle que :
$$\forall X \in \mathbf{M}_{2,1}(\mathbb{R}), \quad \varphi(X, X) = \psi(X, X). \qquad (\star)$$
Or :
$$\forall X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{2,1}(\mathbb{R}), \quad \varphi(X, X) = x^2 - 2xy + 2y^2.$$
La forme bilinéaire ψ canoniquement associée à la matrice
$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$
vérifie donc la condition $(\star)$. Par ailleurs, B est symétrique et il en va donc de même de ψ. Enfin,
$$\forall X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{2,1}(\mathbb{R}), \quad \psi(X, X) = (x - y)^2 + y^2 \geqslant 0$$
avec égalité si, et seulement si, $x - y = y = 0$, i.e. $X = 0$, si bien que ψ est définie-positive.

Exercice 3

Question 1

On montre que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$.

- Le polynôme nul appartient à E qui est donc non vide.
- Pour $P, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,
$$(\lambda P + Q)(0) = \lambda P(0) + Q(0) = 0$$
et de même $(\lambda P + Q)(1) = 0$ si bien que $\lambda P + Q$ appartient à E qui est donc stable par combinaison linéaire.

Exercice 3

Question 2

Pour $P, Q \in E$, $\varphi(P, Q)$ est bien défini en tant qu'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

- La linéarité de l'intégrale donne la linéarité à gauche de φ : pour $P_1, P_2, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P_1 + P_2, Q) &= -\int_0^1 (\lambda P_1(t) + P_2(t))Q''(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\lambda \int_0^1 P_1(t)Q''(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 P_2(t)Q''(t)\,\mathrm{d}t = \lambda\varphi(P_1, Q) + \varphi(P_2, Q).\end{aligned}$$
- on obtient par intégration par parties une nouvelle expression de
$$\begin{aligned}\varphi(P, Q) &= -\int_0^1 P(t)Q''(t)\,\mathrm{d}t = -\big[P(t)Q'(t)\big]_0^1 + \int_0^1 P'(t)Q'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 P'(t)Q'(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{car } P(0) = P(1) = 0\end{aligned}$$
qui est clairement symétrique en P, Q et φ est donc symétrique.

- Enfin, toujours d'après la nouvelle expression de φ, on a pour tout $P \in E$:
$$\varphi(P,P) = \int_0^1 P'(t)^2 \,\mathrm{d}t \geqslant 0$$
avec égalité si, et seulement si, $P'(t) = 0$ pour tout $t \in [0,1]$ car l'application $t \longmapsto P'(t)^2$ est continue et positive sur $[0,1]$. Cette dernière condition signifie que le polynôme P' est nul (car il admet une infinité de racines), c'est-à-dire que P est constant et plus précisément nul puisque $P(0) = 0$.
La forme bilinéaire symétrique φ est donc définie-positive.

Ainsi φ est un produit scalaire sur E. La norme euclidienne associée est l'application
$$P \in E \longmapsto \|P\| = \sqrt{\varphi(P,P)} = \sqrt{\int_0^1 P'(t)^2 \,\mathrm{d}t}.$$

Exercice 5

Question 1

On a tout d'abord :
$$\sum_{i=1}^n \sqrt{i} \geqslant \sum_{i=1}^n 1 = n \geqslant 0$$
d'où :
$$\Big(\sum_{i=1}^n \sqrt{i}\Big)^2 \geqslant n^2.$$
L'inégalité de droite s'obtient par application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique aux vecteurs $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{n})$ et $(1,1,1,\ldots,1)$:
$$\Big(\sum_{i=1}^n \sqrt{i}\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_{i=1}^n i\Big)\Big(\sum_{i=1}^n 1\Big) = \frac{n^2(n+1)}{2}.$$

Exercice 5

Question 2

On raisonne (à $n \geqslant 1$ fixé) par récurrence sur $k \geqslant 1$.

- Le résultat a été établi à la question **1.** pour $k = 1$.
- Pour $k \geqslant 1$, on obtient comme en **1.** :
$$\Big(\sum_{i=1}^n \sqrt[2^{k+1}]{i}\Big)^2 = \Big(\sum_{i=1}^n \sqrt{\sqrt[2^k]{i}}\Big)^2 \leqslant n\Big(\sum_{i=1}^n \sqrt[2^k]{i}\Big)$$
d'où, si le résultat est acquis au rang k,
$$\Big(\sum_{i=1}^n \sqrt[2^{k+1}]{i}\Big)^2 \leqslant n^2 \sqrt[2^k]{\frac{n+1}{2}}$$
ce qui s'écrit encore (l'inégalité de gauche étant évidente, comme en **1.**) :
$$n \leqslant \sum_{i=1}^n \sqrt[2^{k+1}]{i} \leqslant n \cdot \sqrt[2^{k+1}]{\frac{n+1}{2}}$$
et le résultat est donc démontré au rang $k+1$.

D'après le principe de récurrence, le résultat est donc démontré à tout rang $k \geqslant 1$.

Exercice 6

Il s'agit d'interpréter $\sqrt{x^2+2y^2+3z^2}$ comme une norme et $x+y+z$ comme un produit scalaire. Deux possibilités :

1. appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique aux vecteurs $(x, \sqrt{2}y, \sqrt{3}z)$ et $(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$:
$$(x+y+z)^2 \leqslant \Big(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\Big)(x^2+2y^2+3z^2) = \frac{11}{6}(x^2+2y^2+3z^2),$$
d'où le résultat.
2. appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire (exercice...)
$$(u,v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longmapsto \langle u, v\rangle = u_1v_1 + 2u_2v_2 + 3u_3v_3$$
aux vecteurs (x,y,z) et $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$:
$$(x+y+z)^2 \leqslant \Big(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\Big)(x^2+2y^2+3z^2) = \frac{11}{6}(x^2+2y^2+3z^2),$$
d'où le résultat.

Exercice 7

Si un n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$ est solution, alors il réalise l'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée dans $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique aux vecteurs $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(1, \ldots, 1)$:
$$\Big|\sum_{i=1}^n x_i\Big| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\sqrt{n}.$$
Il existe donc un réel λ tel que $(x_1, \ldots, x_n) = \lambda(1, \ldots, 1)$. La condition $\sum x_i = n$ donne alors $\lambda = 1$ et il ne reste donc qu'un candidat : $(1, \ldots, 1)$, dont on vérifie sans difficulté qu'il est bien solution.
En conclusion, le problème proposé admet $(1, \ldots, 1)$ comme unique solution.

Exercice 8

On munit $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique
$$(M,N) \longmapsto \langle M, N\rangle = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} m_{i,j} n_{i,j} = \mathrm{tr}({}^t MN).$$
L'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à $M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ et à I_n s'écrit :
$$|\langle I_n, A\rangle| \leqslant \|I_n\|\,\|A\|$$
ou encore :
$$|\mathrm{tr}\, A| \leqslant \sqrt{n}\sqrt{\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}^2}.$$
Le cas d'égalité se produit si, et seulement si, la famille (M, I_n) est liée i.e. si, et seulement si, la matrice M est scalaire : il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $M = \lambda I_n$.

Exercice 9

Question 1

Deux méthodes sont possibles :

- Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'espace $\mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de son produit scalaire usuel aux fonctions $t \longmapsto \frac{f(t)}{\sqrt{1+t^2}}$ et $t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$:
$$\Big|\int_0^1 \frac{f(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\Big| \leqslant \sqrt{\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}}\sqrt{\int_0^1 \frac{f(t)^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{\int_0^1 \frac{f(t)^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t}.$$
- Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'espace $\mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire (exercice)
$$(g,h) \longmapsto \langle g, h\rangle = \int_0^1 \frac{g(t)h(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$
aux fonctions f et $t \longmapsto 1$.

Le cas d'égalité a lieu si, et seulement si, la famille $(f, t \longmapsto 1)$ est liée i.e. si, et seulement si, f est constante.

Exercice 9

Question 2

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'espace $\mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire (exercice)
$$(g,h) \longmapsto \langle g, h\rangle = \int_0^1 \frac{g(t)h(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$
aux fonctions $t \longmapsto \sqrt{t}$ et f, on obtient :
$$\Big|\int_0^1 \frac{\sqrt{t}f(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\Big| \leqslant \sqrt{\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_0^1 \frac{f(t)^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t}$$
d'où le résultat puisque
$$\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \Big[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\Big]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}.$$
Le cas d'égalité est réalisé si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in [0,1]$, $f(t) = \lambda\sqrt{t}$.

Exercice 10

D'après le théorème fondamental appliqué à f de classe $\mathscr{C}^1$, on a pour tout $x \in [a, b]$:

$$|f(x)| = \left|f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^x |f'(t)|\,\mathrm{d}t$$

d'où, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée dans l'espace $\mathscr{C}([a,x],\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique aux fonctions $t \longmapsto |f'(t)|$ et $t \longmapsto 1$:

$$|f(x)|^2 \leqslant \left(\int_a^x |f'(t)|\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \left(\int_a^x \mathrm{d}t\right)\left(\int_a^x f'(t)^2\,\mathrm{d}t\right)$$

$$\leqslant (x-a)\int_a^x f'(t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant (x-a)\int_a^b f'(t)^2\,\mathrm{d}t.$$

Il en résulte, par croissance et linéarité de l'intégrale, que :

$$\int_a^b |f(t)|^2\,\mathrm{d}t \leqslant \left(\int_a^b (t-a)\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b f'(t)^2\,\mathrm{d}t\right) = \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b f'(t)^2\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 12

Tout d'abord, on a $0 \leqslant \frac{1}{X} \leqslant 1$ puisque X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, si bien que $\frac{1}{X}$ admet une espérance par domination.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $p_k = \mathbb{P}(X = k)$. Par définition et d'après le théorème de transfert,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k \quad \text{et} \quad \mathbb{E}\Big(\frac{1}{X}\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k}{k}.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique appliquée aux vecteurs $\big(\sqrt{kp_k}\big)_{1\leqslant k\leqslant n}$ et $\big(\sqrt{\frac{p_k}{k}}\big)_{1\leqslant k\leqslant n}$, on a :

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} p_k\Big) = \Big(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{kp_k}\sqrt{\frac{p_k}{k}}\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} kp_k\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{p_k}{k}\Big).$$

En passant aux limites (qui existent) lorsque $n \to \infty$, on obtient donc :

$$1 = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} p_k\Big)^2 \leqslant \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}\Big(\frac{1}{X}\Big),$$

d'où le résultat.

Exercice 14

On a $A^2 = -{}^tAA$ d'où, pour tout $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$${}^tXA^2X = -{}^t(AX)(AX) = -\|AX\|^2 \leqslant 0$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne canonique sur $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Si λ est une valeur propre de A^2, il existe $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tel que $A^2X = \lambda X$ et l'on a donc

$${}^tXA^2X = \lambda {}^tXX = \lambda \|X\|^2 \leqslant 0$$

d'où, puisque $\|X\|^2 > 0$ étant donné que $X \neq 0$, l'on déduit que $\lambda \leqslant 0$.
Ainsi les valeurs propres de A^2 sont toutes négatives ou nulles.

Exercice 15

On a tout d'abord l'inclusion $\operatorname{Ker} A \subset \operatorname{Ker} {}^tAA$. En effet, pour $X \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{R})$,

$$AX = 0 \implies {}^tAAX = 0.$$

Réciproquement, si ${}^tAAX = 0$ alors, en notant $\|\cdot\|$ la norme euclidienne canonique sur $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$\|AX\|^2 = {}^t(AX)(AX) = {}^tX{}^tAAX = 0,$$

ce qui implique $AX = 0$ par propriété de séparation de la norme. L'égalité $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} {}^tAA$ est donc établie. Le théorème du rang appliqué aux applications linéaires canoniquement associés à A et ${}^tAA$ donne ensuite :

$$p = \dim(\operatorname{Ker} A) + \operatorname{rg} A$$

ainsi que :

$$p = \dim(\operatorname{Ker} {}^tAA) + \operatorname{rg} {}^tAA,$$

d'où l'on déduit que $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} {}^tAA$.

Exercice 16

Pour $i \neq j$, on a :

$$1 = \|e_i - e_j\|^2 = \|e_i\|^2 - 2\langle e_i, e_j\rangle + \|e_j\|^2$$

d'où, puisque les vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ sont unitaires, $\langle e_i, e_j\rangle = \frac{1}{2}$.
Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ réels tels que $\sum_{j=1}^n \lambda_j e_j = 0$. En prenant le produit scalaire contre chaque vecteur e_i, on obtient les relations :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad 0 = \Big\langle e_i, \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j\Big\rangle = \sum_{j=1}^n \langle e_i, e_j\rangle \lambda_j.$$

Le vecteur $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ est donc solution du système linéaire

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \cdots + \lambda_n = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 + \cdots + \lambda_n = 0 \\ \quad\vdots \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{n-1} + 2\lambda_n = 0 \end{cases}.$$

En sommant toutes les relations, on obtient $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 0$ d'où l'on déduit ensuite (d'après les relations restantes dans le système) que $\lambda_j = 0$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$.
Ainsi la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre. Formée de n vecteurs en dimension n, c'est donc une base de E.

Exercice 17

Question 1

L'application f est définie sur E et à valeurs dans E. Elle est linéaire par linéarité à droite du produit scalaire : pour $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$f(\lambda x + y) = \lambda x + y + a\langle u, \lambda x + y\rangle u = \lambda x + y + a\big(\lambda\langle u, x\rangle + \langle u, y\rangle\big)u$$

$$= \lambda\big(x + a\langle u, x\rangle u\big) + \big(y + a\langle u, y\rangle u\big) = \lambda f(x) + f(y).$$

L'application f est donc un endomorphisme de E.

Exercice 17

Question 2

Pour $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \lambda x \iff (\lambda - 1)x = a\langle x, u\rangle u$$

$$\implies \Big(\big(\lambda \neq 1 \text{ et } x \in \operatorname{Vect} u\big) \text{ ou } \big(\lambda = 1 \text{ et } \langle x, u\rangle = 0\big)\Big).$$

Réciproquement,

- $\langle u, x\rangle = 0$ implique $f(x) = x$. Or les vecteurs orthogonaux à u composent le noyau de la forme linéaire non nulle $x \longmapsto \langle u, x\rangle$, c'est-à-dire l'hyperplan $(\operatorname{Vect} u)^\perp$ orthogonal à u ; celui-ci est non nuls si, et seulement si, $n \geqslant 2$. Ainsi 1 est valeur propre de f si, et seulement si, $n \geqslant 2$ avec pour sous-espace propre associé Le sous-espace propre associé l'hyperplan $(\operatorname{Vect} u)^\perp$.
- Les autres vecteurs propres éventuels sont sur la droite dirigée par u. Or $f(u) = u + a\langle u, u\rangle u = (a+1)u$ donc la seule autre valeur propre possible est $a + 1$, qui est effectivement valeur propre de f. Puisque $a \neq 0$, le sous-espace propre associé est la droite dirigée par u.

D'après l'étude précédente,

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, f} \dim E_\lambda(f) = \dim E_1(f) + \dim E_{a+1}(f) = (n-1) + 1 = n$$

si bien que f est diagonalisable.

Exercice 18

Question 1

On vérifie que

$$\|e_1\| = \|e_2\| = \|e_3\| = 1$$

ainsi que

$$\langle e_1, e_2\rangle = \langle e_1, e_3\rangle = \langle e_2, e_3\rangle = 0.$$

La famille (e_1, e_2, e_3) est donc orthonormale.

Exercice 18

Question 2

On envisage un vecteur $e_4 = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Pour que la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) soit orthonormale, il faut et il suffit que :

$$\begin{cases} \langle e_4, e_1\rangle = 0 \\ \langle e_4, e_2\rangle = 0 \\ \langle e_4, e_3\rangle = 0 \\ \|e_4\|^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+z+t = 0 \\ x-y+z-t = 0 \\ x+y-z-t = 0 \\ x^2+y^2+z^2+t^2 = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y+z+t = 0 \\ x+z = 0 \\ x+y = 0 \\ x^2+y^2+z^2+t^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} t = x \\ z = -x \\ y = -x \\ x^2 = \frac{1}{4} \end{cases}.$$

Seuls deux vecteurs réalisent donc ces conditions : $\pm\frac{1}{2}(1, -1, -1, 1)$.
Pour chacun d'eux, la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est orthonormale donc libre, formée de 4 vecteurs en dimension 4 ; c'est une base orthonormale de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 19

Soit $P_0 = 1 + X - X^3$. Un polynôme $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$ appartient à $F^\perp$ si, et seulement si,

$$\langle P_0, P\rangle = 0 \iff a_0 + a_1 - a_3 = 0.$$

L'équation précédente est celle d'un hyperplan : le sous-espace $F^\perp$ est donc de dimension 3.
Il s'agit de construire une famille orthogonale de $F^\perp$ formée de trois vecteurs non nuls de $F^\perp$. Le vecteur $P_1 = X^2$ est tout d'abord orthogonal à P_0 donc à F. Puis $P_2 = 1 - X$ est orthogonal à P_0 (donc à F) et P_1.

Le choix du vecteur suivant étant moins évident, on peut détailler les conditions qui portent sur ses coefficients : un vecteur $P_3 = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$ est orthogonal à P_0, P_1 et P_2 si, et seulement si, ses coefficients sont solutions du système ci-dessous

$$\begin{cases} a_0 + a_1 - a_3 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_0 - a_1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_3 = 2a_0 \\ a_2 = 0 \\ a_1 = a_0 \end{cases}.$$

On met ainsi en évidence (par exemple) le vecteur $P_3 = 1 + X + 2X^3$.
On a ainsi construit une famille orthogonale (P_1, P_2, P_3) de vecteurs non nuls de $F^\perp$, donc une famille libre de $F^\perp$, formée de 3 vecteurs en dimension 3 : c'est donc une base orthogonale de $F^\perp$.

Exercice 20

Question 1

On vérifie que la famille $\underline{U}$ est libre. Formée de 3 vecteurs en dimension 3, c'est donc une base de $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
Cependant $\langle U_1, U_2\rangle = -1$ et cette base n'est donc pas orthonormale pour le produit scalaire canonique $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Exercice 20

Question 2

Soient φ un produit scalaire sur $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et A sa matrice représentative en base canonique. Sa matrice B en base $\underline{U}$ est donnée par la formule $B = {}^tPAP$ où P désigne la matrice de passage de la base canonique à la base $\underline{U}$:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La base $\underline{U}$ est orthonormale pour le produit scalaire φ si, et seulement si $B = I_n$ c'est-à-dire $A = {}^tQQ$ où $Q = P^{-1}$ (et ${}^tQ = {}^t(P^{-1}) = ({}^tP)^{-1}$). Il y a donc unicité du produit scalaire φ rendant la base $\underline{U}$ orthonormale.

Reste réciproquement à vérifier que la matrice précédente

$$A = {}^tQQ = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -3 & 5 & -3 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

définit un produit scalaire φ (pour lequel la base $\underline{U}$ sera orthonormale d'après le raisonnement précédent).
Tout d'abord la matrice A est symétrique : ${}^tA = {}^t({}^tQQ) = {}^tQQ = A$ donc φ est symétrique.
Puis, pour $X \in \mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on a

$$\varphi(X, X) = {}^tXAX = {}^tX\,{}^tQQX = {}^t(QX)(QX) = \|QX\|^2$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne canonique sur $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
On a donc $\varphi(X, X) \geqslant 0$ avec égalité si, et seulement si, $QX = 0$ (par séparation de la norme) c'est-à-dire, puisque Q est inversible, $X = 0$. La forme φ est donc définie-positive. C'est bien un produit scalaire sur $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
Il existe donc un unique produit scalaire sur $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour lequel la base $\underline{U}$ est orthonormale.

Exercice 21

Question 1

On a tout d'abord d'après l'inégalité triangulaire :

$$\Big\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \Big\|^2 \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \, \|u_i\| \Big)^2$$

puis, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$ euclidien canonique appliquée aux vecteurs $(|\lambda_i|)_i$ et $(\|u_i\|)_i$:

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \, \|u_i\| \Big)^2 \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \Big) \Big(\sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2 \Big),$$

d'où le résultat.

Exercice 21

Question 2

Comme la famille est formée de n vecteurs dans E de dimension n, il suffit de montrer qu'elle est libre. Or, si $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ sont tels que $\sum_i \lambda_i (e_i + u_i) = 0$, alors

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i .$$

Mais la base $(e_i)_{i=1}^n$ étant orthonormale, on peut appliquer le théorème de Pythagore à la famille orthogonale $(\lambda_1 e_1, \dots, \lambda_n e_n)$:

$$\Big\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \Big\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|\lambda_i e_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \, \|e_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$$

et l'inégalité de la question **1.** donne donc :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \Big) \Big(\sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2 \Big),$$

ce qui n'est possible que si $\sum_i \lambda_i^2 = 0$ puisque $\sum_i \|u_i\|^2 < 1$ par hypothèse, et l'on a donc nécessairement $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Exercice 22

Question 1

Soient g_1 une primitive de f et g_2 une primitive de g_1 (qui existent car f puis g_1 sont continues).
Les primitives de f sont les fonctions de la forme $g_1 + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Les fonctions g de classe $\mathscr{C}^2$ telles que $g'' = f$, qui sont les primitives des fonctions précédentes, sont donc les fonctions de la forme $g : x \longmapsto g_2(x) + \alpha x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Une telle fonction satisfait aux conditions $g(a) = g(b) = 0$ si, et seulement si α et β sont solutions du système

$$\begin{cases} g_2(a) + \alpha a + \beta = 0 \\ g_2(b) + \alpha b + \beta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a\alpha + \beta = -g_2(a) \\ b\alpha + \beta = -g_2(b) \end{cases}.$$

Ce système étant de Cramer car $a \neq b$, il existe donc une unique fonction g de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $g'' = f$ et $g(a) = g(b) = 0$.

On obtient alors, par intégration par parties, en dérivant g et en primitivant $f = g''$:

$$\int_a^b f(t) g(t) \,\mathrm{d}t = \big[g'(t) g(t) \big]_a^b - \int_a^b g'(t)^2 \,\mathrm{d}t = - \int_a^b g'(t)^2 \,\mathrm{d}t$$

puisque $g(a) = g(b) = 0$.

Exercice 22

Question 2

Si $f \in F^\perp$ alors, en notant g la fonction qui lui a été associée dans la question **1.**, on a $\langle f, g \rangle = 0$ car $g \in F$ donc, d'après **1.**,

$$\int_a^b g'(t)^2 \,\mathrm{d}t = 0.$$

La fonction g'^2 étant continue et positive, on en déduit que g' est identiquement nulle sur $[a, b]$. Par suite, $f = g''$ est également nulle sur $[a, b]$.
On a ainsi établi que l'orthogonal de F est nul : $F^\perp = \{0\}$.
La somme directe $F \oplus F^\perp = F$ n'est donc pas égale à E et le double orthogonal $F^{\perp\perp} = \{0\}^\perp = E$ pas égal à F.