

Variables aléatoires à densité

Feuille d'exercices

1 Pour $c \in \mathbb{R}$, on considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{c}{(1+x)^2} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

- Donner une condition nécessaire et suffisante sur c pour que f soit une densité de probabilité. On suppose cette condition satisfaite dans la suite de l'exercice et on considère une variable aléatoire X de densité f . Tracer l'allure de la courbe représentative de f .
- Déterminer la fonction de répartition de X et tracer l'allure de sa courbe représentative.
- Montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer.

2 Soit X une variable aléatoire de densité f définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ xe^{-x^2/2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

- Vérifier que f est une densité de probabilité et tracer l'allure de son graphe.
- Calculer la fonction de répartition de X et tracer l'allure de sa courbe représentative.
- Montrer que X admet une espérance et une variance que l'on calculera.
- Montrer que $Y = X^2$ suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

3 Montrer que la fonction

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x - 1 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ (x - 2)^5 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est une densité de probabilité. Déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire X de densité f .

4 **Loi bêta de première espèce**

★ Dans tout l'exercice, n et m désignent des entiers naturels non nuls. On pose :

$$\beta(n, m) = \int_0^1 u^{n-1}(1-u)^{m-1} du.$$

- a. Prouver que $\beta(n, m) = \beta(m, n)$ et que, pour $m \geq 2$:

$$\beta(n, m) = \frac{m-1}{n} \beta(n+1, m-1).$$

- b. En déduire une expression de $\beta(n, m)$.

2. On considère la fonction

$$f_{n,m} : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\beta(n, m)} x^{n-1} (1-x)^{m-1} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

- Montrer que $f_{n,m}$ est une densité de probabilité.
- Soit X une variable aléatoire admettant $f_{n,m}$ comme densité. Après en avoir justifié l'existence, calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

5 1. a. Montrer que

$$F : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X à densité, dont on déterminera une densité.

- Étudier l'existence de l'espérance et de la variance de X .
- Calculer l'espérance de X .

2. On considère la variable aléatoire $Y = \frac{e^X + 1}{e^X - 1}$.

- En déterminer une densité.
- Admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

6 Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[-2, 1]$.

- Après en avoir justifié l'existence, calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire $Z = X^2$.
- Déterminer une densité de Z et retrouver la valeur de $\mathbb{E}(Z)$ à partir de cette densité.

7 Soit X une variable aléatoire uniforme sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Déterminer la loi et, si elles existent, l'espérance et la variance de $Y = \tan X$.

8 Soient U_1, \dots, U_n des variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi uniforme sur $[0, 1]$. On note $X = \max_{1 \leq i \leq n} U_i$ et $Y = \min_{1 \leq i \leq n} U_i$.

- Déterminer une densité de X , son espérance et sa variance.
- Mêmes questions avec Y .

9 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Déterminer une densité de $S = X+Y$ dans les deux cas suivants.

- X et Y suivent des lois exponentielles de paramètres respectifs 1 et 2.
- X suit la loi uniforme sur $[0, 1]$ et Y la loi exponentielle de paramètre 1.

10 Soient X, Y et Z des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant respectivement des lois uniformes sur $[0, 1]$, $[0, 2]$ et $[0, 3]$. Déterminer une densité de $S = X + Y + Z$.

- 11** 1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $x, y \in \mathbb{R}$ pour que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ y & 2x \end{pmatrix}$$

soit diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$.

2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$. On note F_X et F_Y les fonctions de répartition associées.
- Déterminer une densité de X^2 .
 - Déterminer une densité de $-Y$.
 - En déduire que la variable aléatoire $X^2 - Y$ admet pour densité la fonction h définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 1 - \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

- d. Déterminer la probabilité que la matrice aléatoire

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ Y & 2X \end{pmatrix}$$

soit diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$.

- 12** On considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes de même loi exponentielle de paramètre 1.

1. Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que la variable aléatoire $Y - tX$ admet pour densité la fonction

$$h : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \frac{e^{-x}}{t+1} & \text{si } x > 0 \\ \frac{e^{x/t}}{t+1} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$

2. En déduire la fonction de répartition de la variable aléatoire $Z = Y/X$.
3. Déterminer la loi de la variable aléatoire $U = \frac{X}{X+Y}$.

- 13** Soient $r \in \mathbb{R}_+^*$, X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi uniforme sur $]0, r]$. On pose $U = \ln(X/r)$ et $V = -\ln(Y/r)$.

- Déterminer la fonction de répartition puis une densité de U et V . Tracer l'allure des représentations graphiques de ces fonctions.
- En déduire une densité et la fonction de répartition de $U + V$.
- On pose $Q = X/Y$.
 - Montrer que Q est une variable à densité et donner une densité de Q .
 - La variable aléatoire Q admet-elle une espérance ?

- 14** *Loi de l'arcsinus (oral ESCP)*

- Soit Z une variable aléatoire réelle à valeurs dans $]0, 1[$ possédant une densité g continue sur $]0, 1[$. Montrer que Z admet une espérance. Que vaut cette espérance si l'on suppose de plus que $g(1-x) = g(x)$ pour tout $x \in]0, 1[$?
- Montrer que la fonction $x \mapsto \sin x$ réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$. Montrer que sa fonction réciproque φ est dérivable sur $] -1, 1[$ et calculer sa dérivée.
- Montrer la convergence et calculer la valeur de l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

Indication. Mettre sous forme canonique l'expression sous la racine pour se ramener à la dérivée de φ .

4. Montrer que la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est une densité de probabilité.

5. Soit X une variable aléatoire admettant cette densité.
- Déterminer $\mathbb{E}(X)$ en utilisant la question 1.
 - Retrouver ce résultat en utilisant la définition de l'espérance et le changement de variable $x = \sin^2 \theta$.

- 15** On choisit au hasard sur le cercle trigonométrique deux points A et B , ce qui signifie que l'on choisit deux angles α et β de façon indépendante et uniforme dans $[-\pi, \pi[$, les points A et B étant représentés dans le plan complexe par $e^{i\alpha}$ et $e^{i\beta}$ respectivement. On se propose de calculer la probabilité que la longueur AB soit inférieure ou égale à 1 et, pour ce faire, on note X la variable aléatoire égale à la longueur AB .

- Montrer que $\mathbb{P}(X \leq 1) = \mathbb{P}(\cos(\alpha - \beta) \geq \frac{1}{2})$.
- Trouver une densité de $\alpha - \beta$ puis déterminer $\mathbb{P}(X \leq 1)$.
- Soit Y la variable aléatoire prenant l'unique valeur de $[-\pi, \pi[$ congrue à $\alpha - \beta$ modulo 2π . Déterminer une densité de Y et commenter le résultat. Retrouver le résultat de la question 2.
- Montrer que $X = 2 \sin \frac{|Y|}{2}$.
- Montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer.
- Déterminer une densité de X (on pourra utiliser l'exercice 14).

- 16** On considère une variable aléatoire X à valeurs dans \mathbb{R}_+ . On suppose que X admet une densité f continue sur \mathbb{R}_+ . On définit la variable aléatoire $Y = \lfloor X \rfloor$ (partie entière de X).

- Peut-on affirmer que f est nulle sur \mathbb{R}_+^* ? On supposera que c'est le cas.
- Déterminer la loi de Y en fonction de f .

3. On définit la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles de la série $\sum n \mathbb{P}(Y = n)$ ainsi que la fonction

$$G : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^x tf(t) dt.$$

a. Justifier que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad k \int_k^{k+1} f(t) dt \leq \int_k^{k+1} tf(t) dt \leq (k+1) \int_k^{k+1} f(t) dt$$

b. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n \leq G(n+1) \leq S_n + 1.$$

c. En déduire que X admet une espérance si, et seulement si, Y admet une espérance et que dans ces conditions, $\mathbb{E}(Y) \leq \mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y) + 1$.

4. On suppose dans cette question que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

a. Préciser la loi de Y et calculer son espérance.

b. Montrer que $Z = X - Y$ est une variable à densité et en donner une densité. Montrer que Z admet une espérance que l'on calculera.

17 Trois personnes A, B et C se présentent à l'ouverture d'un bureau de poste comportant deux guichets. A et B accèdent directement à un guichet, tandis que C attend que l'un des deux guichets se libère.

On note X, Y et Z les variables aléatoires égales au temps passé au guichet par les usagers A, B et C respectivement. On suppose que ces variables sont mutuellement indépendantes et suivent la même loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose $U = |X - Y|$ et $V = \min(X, Y)$.

1. a. Déterminer une densité de $-Y$ puis une densité de $X - Y$.

b. En déduire une densité de U.

2. On note E l'événement « C est la dernière personne à sortir de la poste ». Justifier que $E = [U - Z \leq 0]$ puis en déduire la valeur de $\mathbb{P}(E)$.

3. Montrer que V suit la même loi que U.

4. On note T le temps passé par C à la poste.

a. Montrer que T est une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité.

b. Calculer le temps moyen passé par C à la poste.

18 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}_+ . On suppose que X est à densité f continue \star sur \mathbb{R}_+ et nulle sur \mathbb{R}_-^* . On note F la fonction de répartition de X.

On définit la fonction

$$\varphi : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \int_0^x tf(t) dt.$$

1. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \int_0^x (1 - F(t)) dt = x(1 - F(x)) + \varphi(x).$$

2. Montrer que X admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale ci-dessous converge avec dans ces conditions :

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} (1 - F(t)) dt.$$

3. *Application.* On considère des variables aléatoires X_1, \dots, X_n mutuellement indépendantes de même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pose $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$.

a. Déterminer la fonction de répartition de M_n et montrer que M_n est à densité.

b. Montrer que M_n admet une espérance et la calculer (on exprimera le résultat sous la forme d'une somme).

19 Dans tout l'exercice, X est une variable aléatoire de densité f nulle sur \mathbb{R}_-^* et strictement \star positive en tout point de \mathbb{R}_+^* . On suppose également f continue sur \mathbb{R}_+ et on note F la fonction de répartition de X.

1. On suppose que X représente la durée de vie d'un composant électronique.

a. Pour $t, h \in \mathbb{R}_+^*$, exprimer à l'aide de F la probabilité $p(t, h)$ que le composant tombe en panne avant l'instant $t + h$ sachant qu'il fonctionnait encore à l'instant t .

b. Établir que :

$$p(t, h) \sim \frac{f(t)}{1 - F(t)} h, \quad h \rightarrow 0.$$

On appelle taux de panne de X la fonction positive

$$\lambda_X : t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{f(t)}{1 - F(t)}.$$

2. a. Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, calculer $\int_0^t \lambda_X(u) du$ puis montrer que la seule connaissance de la fonction λ_X permet de déterminer la loi de X.

b. En déduire que λ_X est constant si, et seulement si, X suit une loi exponentielle.

3. On suppose que X représente la durée de vie (en années) d'un appareil dont le taux de panne est donné par $\lambda_X(t) = t^3$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$.

a. Quelle est la probabilité que l'appareil survive plus d'un an ?

b. Quelle est la probabilité que cet appareil, déjà âgé d'un an, survive au moins deux ans de plus ?

20 On considère une entreprise de transports en commun et on s'intéresse aux passages des bus à une station donnée lors d'une journée.

Le service commence à l'instant $T_0 = 0$. Le premier bus de la journée passe à l'instant T_1 . On pose $U_1 = T_1 - T_0$ qui représente donc le temps entre l'ouverture du service et le passage du premier bus de la journée.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, T_n désigne l'instant où le n -ième bus arrive à la station et U_{n+1} le temps écoulé entre les passages du n -ième et du $(n+1)$ -ième bus de la journée.

On suppose que les variables aléatoires $U_n, n \in \mathbb{N}^*$, sont mutuellement indépendantes et qu'elles suivent la même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer T_n en fonction des $U_i, i \in \mathbb{N}^*$, puis en déduire la loi de T_n .

On définit également, pour tous $s, t \in \mathbb{R}_+$ tels que $s \leq t$, le nombre $N_{s,t}$ de bus qui sont passés à la station dans l'intervalle de temps $[s, t]$.

2. Pour $t \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$, justifier que $[N_{0,t} \geq n] = [T_n \leq t]$. En déduire que la variable aléatoire $N_{0,t}$ suit la loi de Poisson de paramètre λt .

On admet que, pour tous $s, t \in \mathbb{R}_+$ tels que $s \leq t$, la variable aléatoire $N_{s,t}$ suit la même loi que $N_{0,t-s}$.

3. On suppose qu'un passager arrive à la station à un instant $t \in \mathbb{R}_+$ donné. On définit le temps d'attente W_t du passager jusqu'à l'arrivée du premier bus.

a. Justifier que pour tout $h \in \mathbb{R}_+$, $[W_t > h] = [N_{t,t+h} = 0]$.

b. En déduire la loi de W_t . Quel est le temps d'attente moyen du passager avant l'arrivée du premier bus ?