Travaux dirigés

Variables aléatoires à densité

ECS2 – Lycée La Bruyère, Versailles

Année 2017/2018

Exercice 1

Question 1

La fonction f est une densité de probabilité si, et seulement si :

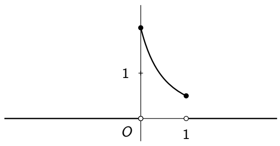
- f est continue sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en un nombre fini de points ;
- f est positive ;
- l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1.

La première condition est satisfaite, la seconde l'est si, et seulement si, $c \geqslant 0$.
Enfin, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge car f est continue sur le segment $[0,1]$ et nulle en dehors, avec

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{c}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{c}{1+t}\right]_0^1 = \frac{c}{2}.$$

La fonction f est donc une densité si, et seulement si, $c = 2$.

La fonction f est représentée ci-dessous



Exercice 1

Question 2

La fonction de répartition F est donnée par :

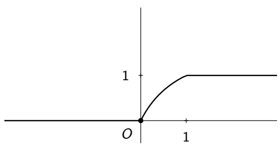
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

- Si $x < 0$,
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0.$$
- Si $0 \leqslant x \leqslant 1$,
$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t + \int_0^x \frac{2\,\mathrm{d}t}{(1+t)^2} = \frac{2x}{1+x}$$
- Si $x > 1$,
$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{2\,\mathrm{d}t}{(1+t)^2} + \int_1^x 0\,\mathrm{d}t = 1.$$

La fonction de répartition

$$F : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \frac{2x}{1+x} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

est représentée ci-dessous :



Remarque. On constate que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf en 0 et 1.

Exercice 1

Question 3

On a :

$$\mathbb{P}(0 \leqslant X \leqslant 1) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

La variable X est donc presque sûrement bornée et admet à ce titre des moments à tous ordres.
En particulier,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 \frac{t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\int_0^1 \left(\frac{1}{1+t} - \frac{1}{(t+1)^2}\right)\mathrm{d}t = 2\ln 2 - 1\end{aligned}$$

D'après le théorème de transfert,

$$\mathbb{E}\big((1+X)^2\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} (1+t)^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 2\,\mathrm{d}t = 2$$

d'où l'on déduit, d'après la formule de Koënig-Huygens, l'expression de

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}\big((X+1)^2\big) - 2\,\mathbb{E}(X) - 1 - \mathbb{E}(X)^2 = 2 - 4(\ln 2)^2.$$

Exercice 2

Question 1

La fonction f est continue sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ (donc sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points) et positive. Par ailleurs, on a trivialement la convergence de

$$\int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

et on obtient sans difficulté

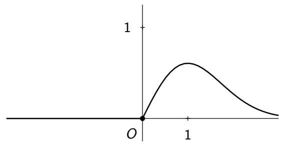
$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x t\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-t^2/2}\right]_0^x = 1 - \mathrm{e}^{-x^2/2} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$$

d'où la convergence et la valeur de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

Toutes les conditions sont donc réunies pour que f soit une densité de probabilité.

Une brève étude de la fonction f permet d'en esquisser le graphe :



Exercice 2

Question 2

La fonction de répartition F de X est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ avec $F' = f$. Elle est donc constante sur $]-\infty, 0[$, égale à sa limite en $-\infty$:

$$\forall x > 0, \quad F(x) = \lim_{-\infty} F = 0.$$

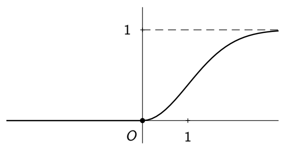
Vu le calcul de primitive de la question **a.**, il existe une constante C telle que :

$$\forall x > 0, \quad F(x) = C - \mathrm{e}^{-x^2/2}.$$

La constante $C = 1$ peut être obtenue par passage à la limite lorsque $x \to +\infty$.
Remarque. La constante C peut aussi être déterminée en utilisant la continuité de F en 0 et les expressions de F sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

Ci-dessous la représentation graphique de la fonction de répartition

$$F : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-x^2/2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$



Exercice 2

Question 3

La fonction f est nulle au voisinage de $-\infty$ et l'on a

$$0 \leqslant xf(x) = x^2\mathrm{e}^{-x^2/2} = o\Big(\frac{1}{x^2}\Big), \quad x \to +\infty,$$

d'où la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$ par comparaison à l'intégrale de Riemann convergente $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ et l'existence de l'espérance

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t.$$

Pour le calcul de $\mathbb{E}(X)$, on procède par intégration par parties sur un segment $[0, x] \subset [0, +\infty[$:

$$\int_0^x t^2\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x t \cdot t\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \big[-t\mathrm{e}^{-t^2/2}\big]_0^x + \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t.$$

En passant à la limite (qui existe) lorsque $x \to +\infty$, on obtient :

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t.$$

Le changement de variable affine $u = \frac{t}{\sqrt{2}}$ donne alors :

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

On justifie l'existence et on calcule de même

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= \int_0^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^3\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t \\ &= \big[-t^2\mathrm{e}^{-t^2/2}\big]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = 2 \end{aligned}$$

La formule de Koënig-Huygens donne alors :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

Remarque. Les intégrales $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(X^2)$ peuvent aussi être calculées grâce au changement de variable $u = t^2/2$ puis en se rapprochant de la fonction Γ.

Exercice 2

Question 4

Pour $y < 0$, on a $\mathbb{P}(Y \leqslant y) = \mathbb{P}(X^2 \leqslant y) = 0$.
Pour $y \geqslant 0$, il vient :

$$\mathbb{P}(Y \leqslant y) = \mathbb{P}(X^2 \leqslant y) = \mathbb{P}(|X| \leqslant \sqrt{y})$$

Or

$$\mathbb{P}(X \leqslant 0) = \int_{-\infty}^0 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

et X est presque sûrement positive. D'où :

$$\mathbb{P}(Y \leqslant y) = \mathbb{P}(X \leqslant \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) = 1 - \mathrm{e}^{-y/2}.$$

Ainsi Y a pour fonction de répartition

$$F_Y : y \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-y/2} & \text{si } y \geqslant 0 \end{cases}.$$

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$ (même en 0) et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ (donc sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points). La variable Y est donc à densité, de densité (par exemple)

$$f_Y : y \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-y/2} & \text{si } y \geqslant 0 \end{cases}.$$

On reconnaît la densité de la loi $\mathcal{E}\big(\frac{1}{2}\big)$.
Remarque. On peut conclure plus tôt si on reconnaît la fonction de répartition de la loi $\mathcal{E}\big(\frac{1}{2}\big)$.

Exercice 4

Question 1.a

Soient $n \geqslant 1$ et $m \geqslant 1$. Tout d'abord l'intégrale $\beta(n, m)$ est bien définie car la fonction $t \longmapsto t^{n-1}(1-t)^{m-1}$ est continue sur le segment $[0, 1]$.
Le changement de variable affine $u = 1 - t$ donne $\beta(n, m) = \beta(m, n)$.
Puis, si $m \geqslant 2$, les fonctions $t \longmapsto (1-t)^{m-1}$ et $t \longmapsto t^n$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[0, 1]$. Une intégration est donc possible :

$$\begin{aligned} \beta(n, m) &= \frac{1}{n}\big[t^n(1-t)^{m-1}\big]_0^1 + \frac{m-1}{n}\int_0^1 t^n(1-t)^{m-2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{m-1}{n}\beta(n+1, m-1). \end{aligned}$$

Exercice 4

Question 1.b

On démontre par récurrence sur $m \geqslant 1$ le prédicat :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \beta(n,m) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(n+m-1)!}.$$

Le résultat est vrai pour $m = 1$:

$$\forall n \geqslant 1, \quad \beta(n,1) = \int_0^1 t^{n-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}.$$

Si, pour $m \geqslant 2$, le résulat est acquis jusqu'au rang $m-1$, alors pour tout $n \geqslant 1$:

$$\beta(n,m) = \frac{m-1}{n}\beta(n+1,m-1) = \frac{m-1}{n}\frac{(m-2)!n!}{(n+m-1)!} = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(n+m-1)!}$$

et le résultat est démontré au rang m. On conclut par le principe de récurrence.

Exercice 4

Question 2.a

La fonction $f_{n,m}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, positive, et on a par définition :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{n,m}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\beta(n,m)}\int_0^1 t^{n-1}(1-t)^{m-1}\,\mathrm{d}t = 1.$$

La fonction $f_{n,m}$ est donc une densité de probabilité.

Exercice 4

Question 2.b

La densité $f_{n,m}$ étant à support borné, la variable X est presque sûrement bornée. Elle admet donc des moments à l'ordre 1 et 2, c'est-à-dire une espérance et une variance.
On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t f_{n,m}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\beta(n,m)}\int_0^1 t^{n}(1-t)^{m-1}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\beta(n+1,m)}{\beta(n,m)} = \frac{(m-1)!n!}{(n+m)!}\,\frac{(n+m-1)!}{(m-1)!(n-1)!} = \frac{n}{n+m}.\end{aligned}$$

De même, X admet pour moment d'ordre 2

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_{n,m}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\beta(n,m)}\int_0^1 t^{n+1}(1-t)^{m-1}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\beta(n+2,m)}{\beta(n,m)} = \frac{(m-1)!(n+1)!}{(n+m+1)!}\,\frac{(n+m-1)!}{(m-1)!(n-1)!} \\ &= \frac{n(n+1)}{(n+m+1)(n+m)}\end{aligned}$$

et donc pour variance :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{nm}{(n+m)^2(n+m+1)}.$$

Exercice 5

Question 1.a

La fonction proposée est continue (à droite) et croissante sur $\mathbb{R}$ et vérifie

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0} F(x) = 1.$$

C'est donc une fonction de répartition. Comme elle est de plus (continue et) de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, toute variable X de fonction de répartition F est à densité donnée par

$$f : x \longmapsto F'(x) = \frac{\mathbf{e}^{-x}}{(1+\mathbf{e}^{-x})^2}.$$

Exercice 5

Question 1.b

Pour $k \in \{1,2\}$, on a

$$t^k f(t) \sim t^k \mathbf{e}^{-|t|} = o\Big(\frac{1}{t^2}\Big), \qquad t \to \pm\infty,$$

d'où l'on déduit que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^k f(t)\,\mathrm{d}t$ converge par comparaison aux intégrales de Riemann convergentes $\int_{-\infty}^{-1} \mathrm{d}t/t^2$ et $\int_1^{+\infty} \mathrm{d}t/t^2$. Ainsi X admet des moments d'ordres 1 et 2 donc une espérance et une variance.

Exercice 5

Question 1.c

La densité de X étant paire (si, si), l'espérance de X est nulle. On peut aussi obtenir le résultat par intégration par parties puis changement de variable $u = \mathbf{e}^t$.

Exercice 5

Question 2.a

Une étude de la fonction

$$\varphi : x \longmapsto \frac{\mathbf{e}^x + 1}{\mathbf{e}^x - 1}$$

permet d'en dresser le tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
φ	-1	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	1

Il en résulte que φ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]-\infty,-1[\,\cup\,]1,+\infty[$ et que :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}(Y \leqslant y) = \begin{cases} \mathbb{P}(\varphi^{-1}(y) \leqslant X < 0) & \text{si } y < -1 \\ \mathbb{P}(X < 0) & \text{si } -1 \leqslant y \leqslant 1 \\ \mathbb{P}(X < 0) + \mathbb{P}(X \geqslant \varphi^{-1}(y)) & \text{si } y > 1 \end{cases}.$$

La fonction de répartition de $Y = \varphi(X)$ s'exprime donc en fonction de celle de X :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad F_Y(y) = \begin{cases} F(0) - F(\varphi^{-1}(y)) & \text{si } y < -1 \\ F(0) & \text{si } -1 \leqslant y \leqslant 1 \\ F(0) + 1 - F(\varphi^{-1}(y)) & \text{si } y > 1 \end{cases}.$$

On obtient sans difficulté l'expression de

$$\forall y \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[, \quad \varphi^{-1}(y) = \ln \frac{y+1}{y-1},$$

ce qui permet de préciser celle de F_Y :

$$F_Y : y \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} -\frac{1}{2y} & \text{si } y < -1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } -1 \leqslant y \leqslant 1 \\ 1 - \frac{1}{2y} & \text{si } y > 1 \end{cases}.$$

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$ (même en -1 et en 1) et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, si bien que Y est à densité donnée par

$$f_Y : y \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } -1 \leqslant y \leqslant 1 \\ \frac{1}{2y^2} & \text{sinon} \end{cases}.$$

Exercice 5

Question 2.b

La variable Y n'admet pas d'espérance car l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_Y(t)\,\mathrm{d}t$ diverge par comparaison (directe !) à l'intégrale de Riemann divergente $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$.

Exercice 6

Question 1

La variable X admet pour densité

$$f_X : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{3} \begin{cases} 1 & \text{si } -2 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

La variable X (ainsi donc que ses puissances) étant presque sûrement bornée, elle admet des moments à tous ordres. Par suite, X^2 admet des moments d'ordre 1 et 2, donc espérance et variance. D'après le théorème de transfert,

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_X(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int_{-2}^{1} t^2\,\mathrm{d}t = 1$$

et

$$\mathbb{E}(Z^2) = \mathbb{E}(X^4) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^4 f_X(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int_{-2}^{1} t^4\,\mathrm{d}t = \frac{11}{5}$$

d'où, d'après la formule de Huygens :

$$\mathbb{V}(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - \mathbb{E}(Z)^2 = \frac{6}{5}.$$

Exercice 6

Question 2

Pour $z < 0$, $\mathbb{P}(Z \leqslant z) = \mathbb{P}(X^2 \leqslant z) = 0$. Pour $z \geqslant 0$,

$$\mathbb{P}(Z \leqslant z) = \mathbb{P}(X^2 \leqslant z) = \mathbb{P}(-\sqrt{z} \leqslant X \leqslant \sqrt{z}) = \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} f_X(t)\,\mathrm{d}t.$$

Par suite, Z admet pour fonction de répartition

$$F_Z : z \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } z \leqslant 0 \\ \frac{2}{3}\sqrt{z} & \text{si } 0 < z \leqslant 1 \\ \frac{1}{3}(1+\sqrt{z}) & \text{si } 1 < z \leqslant 4 \\ 1 & \text{si } z > 4 \end{cases},$$

continue sur $\mathbb{R}$ (même en 0, 1 et 4) et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1, 4\}$.

La variable Z est donc à densité, avec par exemple pour densité :

$$f_Z : z \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{3\sqrt{z}} & \text{si } 0 < z < 1 \\ \frac{1}{6\sqrt{z}} & \text{si } 1 < z < 4 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Cette densité permet de retrouver l'espérance et la variance de Z :

$$\mathbb{E}(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_Z(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int_0^1 \sqrt{t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{6}\int_1^4 \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = 1$$

puis

$$\mathbb{E}(Z^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_Z(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int_0^1 t^{3/2}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{6}\int_1^4 t^{3/2}\,\mathrm{d}t = \frac{11}{5}$$

d'où $\mathbb{V}(Z) = \frac{6}{5}$.

Exercice 7

La variable X admet pour densité la fonction

$$f_X : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{\pi} \begin{cases} 1 & \text{si } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et pour fonction de répartition

$$F_X : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant -\frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{\pi}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) & \text{si } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{si } x \geqslant \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

Pour $y \in \mathbb{R}$, on a par stricte croissance de la fonction arctan :

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(\tan X \leqslant y) = \mathbb{P}(X \leqslant \arctan y) = F_X(\arctan y).$$

D'où la fonction de répartition de Y :

$$F_Y : y \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{\pi}\arctan y + \frac{1}{2}.$$

Celle-ci étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, la variable aléatoire Y est à densité donnée par

$$f_Y : y \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+y^2}.$$

Ainsi Y suit une loi de Cauchy (HP) et l'on a vu en exemple dans le cours qu'elle n'admet pas d'espérance puisque l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t f_Y(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

diverge par comparaison à l'intégrale de Riemann divergente $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$: en effet,

$$t f_Y(t) \sim \frac{1}{t} \geqslant 0, \quad t \to +\infty.$$

Exercice 8

Question 1

Les variables U_i ont même fonction de répartition

$$F_{U_i} : u \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } u < 0 \\ u & \text{si } 0 \leqslant u \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } u > 1 \end{cases}.$$

Or, pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leqslant x) &= \mathbb{P}\left(\max(U_1, U_2, \ldots, U_n) \leqslant x\right) \\ &= \mathbb{P}(U_1 \leqslant x, U_2 \leqslant x, \ldots, U_n \leqslant x). \end{aligned}$$

d'où, par indépendance mutuelle de $U_1, \ldots, U_n$:

$$\mathbb{P}(X \leqslant x) = \mathbb{P}(U_1 \leqslant x)\,\mathbb{P}(U_2 \leqslant x) \cdots \mathbb{P}(U_n \leqslant x) = F_{U_1}(x)^n.$$

On en déduit la fonction de répartition de X :

$$F_X : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^n & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

La fonction précédente est continue sur $\mathbb{R}$ (même en 0 et 1) et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. La variable X est donc à densité, de densité

$$f_X : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} nx^{n-1} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

La variable X (ainsi donc que ses puissances) est donc presque sûrement bornée :

$$\mathbb{P}(0 \leqslant X \leqslant 1) = \int_0^1 f_X(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 nt^{n-1}\,\mathrm{d}t = 1.$$

À ce titre, elle admet des moments d'ordre 1 et 2 et par suite espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf_X(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 nt^n\,\mathrm{d}t = \frac{n}{n+1}$$

puis, d'après le théorème de transfert,

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_X(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 nt^{n+1}\,\mathrm{d}t = \frac{n}{n+2}$$

et donc :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}.$$

Exercice 8

Question 2

De même, pour $y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y \leqslant y) &= \mathbb{P}\big(\min(U_1, U_2, \ldots, U_n) \leqslant y\big) \\ &= 1 - \mathbb{P}\big(\min(U_1, U_2, \ldots, U_n) > y\big) \\ &= 1 - \mathbb{P}(U_1 > y, U_2 > y, \ldots, U_n > y) \\ &= 1 - \mathbb{P}(U_1 > y)\,\mathbb{P}(U_2 > y) \cdots \mathbb{P}(U_n > y) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n (1 - \mathbb{P}(U_i \leqslant y)) = 1 - (1 - F_{U_1}(y))^n \end{aligned}$$

d'où la fonction de répartition de Y :

$$F_Y : y \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ 1 - (1-y)^n & \text{si } 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } y > 1 \end{cases}.$$

La variable Y est donc à densité donnée par

$$f_Y : y \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} n(1-y)^{n-1} & \text{si } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

La variable Y étant presque sûrement bornée, elle admet espérance et variance (que l'on peut par exemple calculer grâce au changement de variable $u = 1 - t$) :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \int_0^1 nt(1-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}, \\ \mathbb{E}(Y^2) &= \int_0^1 nt^2(1-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{(n+1)(n+2)}, \\ \mathbb{V}(Y) &= \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}. \end{aligned}$$

REMARQUE

Exercice 9

Question 1

Les variables X et Y ont respectivement pour densités :

$$f_X : x \longmapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad f_Y : x \longmapsto \begin{cases} 2\mathrm{e}^{-2x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Ces deux variables étant indépendantes avec des densités bornées (il suffirait que l'une le soit), leur somme est aussi à densité, donnée par

$$f_{X+Y} = f_X \star f_Y : x \in \mathbb{R} \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

Pour $x, t \in \mathbb{R}$, $f_X(t) f_Y(x-t) \neq 0$ équivaut à $0 \leqslant t \leqslant x$.

- Pour $x < 0$, aucun réel t ne satisfait l'inégalité précédente, si bien que $f_{X+Y}(x) = 0$.
- Pour $x \geqslant 0$, le domaine d'intégration utile est l'intervalle $[0, x]$:

$$f_{X+Y}(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t} 2\mathrm{e}^{-2(x-t)}\,\mathrm{d}t = 2\mathrm{e}^{-2x} \int_0^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = 2\mathrm{e}^{-x}(1 - \mathrm{e}^{-x}).$$

En conclusion, $X + Y$ admet pour densité

$$f_{X+Y} : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 2\mathrm{e}^{-x}(1 - \mathrm{e}^{-x}) & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Exercice 9

Question 2

Les variables X et Y ont respectivement pour densités :

$$f_X : x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad f_Y : x \longmapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Ces deux variables étant indépendantes avec des densités bornées (il suffirait que l'une le soit), leur somme est aussi à densité, donnée par

$$f_{X+Y} = f_X \star f_Y : x \in \mathbb{R} \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

Pour $x, t \in \mathbb{R}$, $f_X(t) f_Y(x-t) \neq 0$ équivaut à $t \in [0,1] \cap]-\infty, x]$.

- Si $x < 0$, alors $f_X(t) f_Y(x-t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, si bien que $f_{X+Y}(x) = 0$.
- Si $0 \leqslant x \leqslant 1$, l'intervalle d'intégration utile est $[0,1] \cap]-\infty, x] = [0, x]$:
$$f_{X+Y}(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-(x-t)} \, \mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-x} \int_0^x \mathrm{e}^{t} \, \mathrm{d}t = 1 - \mathrm{e}^{-x}.$$
- Si $x > 1$, l'intervalle d'intégration utile est $[0,1] \cap]-\infty, x] = [0,1]$:
$$f_{X+Y}(x) = \int_0^1 \mathrm{e}^{-(x-t)} \, \mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-x} \int_0^1 \mathrm{e}^{t} \, \mathrm{d}t = (\mathrm{e}-1)\mathrm{e}^{-x}.$$

En conclusion, $X+Y$ admet pour densité
$$f_{X+Y} : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-x} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ (\mathrm{e}-1)\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

Exercice 10

On obtient par convolution la densité de $X+Y$:
$$x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ \frac{3-x}{2} & \text{si } 2 \leqslant x \leqslant 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
puis celle de $(X+Y)+Z$:
$$x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} \frac{x^2}{12} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \frac{2x-1}{12} & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ \frac{(x-1)(5-x)}{12} & \text{si } 2 \leqslant x \leqslant 4 \\ \frac{11-2x}{12} & \text{si } 4 \leqslant x \leqslant 5 \\ \frac{(6-x)^2}{12} & \text{si } 5 \leqslant x \leqslant 6 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Exercice 11

Question 1

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on calcule
$$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ y & 2x - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2x\lambda + y.$$

On obtient un trinôme de discriminant $\Delta = 4(x^2 - y)$.

- Si $\Delta > 0$, alors A présente deux valeurs propres distinctes donc est diagonalisable ;
- Si $\Delta < 0$, alors A ne présente aucune valeur propre donc n'est pas diagonalisable ;
- Si $\Delta = 0$, alors A présente une unique valeur propre ; n'étant pas diagonale, la matrice A n'est dans ce cas pas diagonalisable.

En conclusion, la matrice A est digonalisable si, et seulement si, $x^2 - y > 0$.

Exercice 11

Question 2.a

Étant donné que $X \geqslant 0$ presque sûrement, on a pour $x \geqslant 0$:
$$\mathbb{P}(X^2 \leqslant x) = \mathbb{P}(X \leqslant \sqrt{x}) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$
alors que bien sûr $\mathbb{P}(X^2 \leqslant x) = 0$ si $x < 0$. La fonction de répartition de la variable X^2 est donc donnée par :
$$F_{X^2} : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}.$$
Elle est continue sur $\mathbb{R}$ (même en 0 et 1), de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ avec :
$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}, \quad F'_{X^2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$
D'où l'on déduit une densité de X^2 :
$$f_{X^2} : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Exercice 11

Question 2.b

Pour $y \in \mathbb{R}$,
$$\mathbb{P}(-Y \leqslant y) = \mathbb{P}(Y \geqslant -y) = 1 - \mathbb{P}(Y < -y),$$
d'où la fonction de répartition de $-Y$ est donnée par :
$$F_{-Y} : y \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } y < -1 \\ 1 + y & \text{si } -1 \leqslant y \leqslant 0 \\ 1 & \text{si } y > 0 \end{cases}.$$
Celle-ci est continue sur $\mathbb{R}$ (même en -1 et 0), de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ avec :
$$\forall y \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}, \quad F'_{-Y}(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 < y < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$
D'où une fonction densité de $-Y$:
$$f_{-Y} : y \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } -1 < y < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Exercice 11

Question 2.c

Puisque les variables X et Y sont indépendantes par hypothèse, les variables X^2 et $-Y$ le sont aussi. Comme par ailleurs la densité f_{-Y} est bornée, la variable $Z = X^2 - Y$ admet pour densité
$$f_Z = f_{X^2} \star f_{-Y} : z \in \mathbb{R} \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X^2}(t) f_{-Y}(z-t) \, \mathrm{d}t.$$
Pour que $f_{X^2}(t) f_{-Y}(z-t) \neq 0$, il faut que $0 \leqslant t \leqslant 1$ et $-1 \leqslant z - t \leqslant 0$, i.e. $t \in [0,1] \cap [z, z+1]$.

- Si $-1 \leqslant z < 0$, alors $[0,1] \cap [z, z+1] = [0, z+1]$ d'où
$$f_Z(z) = \int_0^{z+1} \frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}} = \sqrt{z+1}.$$
- Si $0 \leqslant z \leqslant 1$, alors $[0,1] \cap [z, z+1] = [z, 1]$ d'où
$$f_Z(z) = \int_z^1 \frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}} = 1 - \sqrt{z}.$$
- Sinon, $z + 1 < 0$ ou $z > 1$ et alors $[0,1] \cap [z, z+1] = \emptyset$ d'où $f_Z(z) = 0$.

Exercice 11

Question 2.d

D'après la question **1.**, l'événement « M est diagonalisable » est réalisé si, et seulement si, $Z = X^2 - Y > 0$ et a donc pour probabilité, d'après la question **c.** :
$$\mathbb{P}(Z > 0) = \int_0^{+\infty} f_Z(t) \, \mathrm{d}t = \int_0^1 (1 - \sqrt{t}) \, \mathrm{d}t = \frac{1}{3}.$$

Exercice 13

Question 1

Les variables X et Y ont pour fonction de répartition commune
$$F : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x/r & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant r \\ 1 & \text{si } x > r \end{cases}.$$
Pour $u \in \mathbb{R}$,
$$F_U(u) = \mathbb{P}(U \leqslant u) = \mathbb{P}(X \leqslant r\mathrm{e}^u) = F(r\mathrm{e}^u) = \begin{cases} \mathrm{e}^u & \text{si } u \leqslant 0 \\ 1 & \text{si } u > 0 \end{cases}.$$
La variable U, qui admet ainsi une fonction de répartition continue sur $\mathbb{R}$ (même en 0) et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, est donc à densité donnée par
$$f_U : u \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} \mathrm{e}^u & \text{si } u < 0 \\ 0 & \text{si } u \geqslant 0 \end{cases}.$$

Comme X et Y ont même loi, les variables $U = \ln(X/r)$ et $-V = \ln(Y/r)$ ont également même loi. Par suite, pour $v \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(V \leqslant v) = \mathbb{P}(-V \geqslant -v) = \mathbb{P}(U \geqslant -v) = 1 - F_U(-v).$$

La variable V admet donc pour fonction de répartition

$$F_V : v \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } v < 0 \\ 1 - \mathbf{e}^{-v} & \text{si } v \geqslant 0 \end{cases},$$

continue sur $\mathbb{R}$ (même en 0) et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. Ainsi la variable V est à densité donnée par

$$f_V : v \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } v \leqslant 0 \\ \mathbf{e}^{-v} & \text{si } v > 0 \end{cases}.$$

La variable V suit donc la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$.

Exercice 13

Question 2

Puisque les variables X et Y sont indépendantes, les variables U et V le sont aussi. Leurs densités étant par ailleurs bornées, la variable $S = U + V$ est à densité donnée par

$$f_S = f_U \star f_V : s \in \mathbb{R} \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(t) f_V(s-t)\,\mathrm{d}t.$$

Or $f_U(t) f_V(s-t) \neq 0$ implique $t \in]-\infty, 0] \cap]-\infty, s]$. On a donc pour $s \leqslant 0$:

$$f_S(s) = \int_{-\infty}^{s} \mathbf{e}^t \mathbf{e}^{-(s-t)}\,\mathrm{d}t = \mathbf{e}^{-s} \int_{-\infty}^{s} \mathbf{e}^{2t}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathbf{e}^s}{2}$$

et pour $s > 0$:

$$f_S(s) = \int_{-\infty}^{0} \mathbf{e}^t \mathbf{e}^{-(s-t)}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathbf{e}^{-s}}{2}.$$

Bref, S a pour densité la fonction

$$f_S : s \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} \mathbf{e}^s/2 & \text{si } s < 0 \\ \mathbf{e}^{-s}/2 & \text{si } s \geqslant 0 \end{cases}.$$

La fonction de répartition F_S de S s'obtient à partir de f_S par la formule

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad F_S(s) = \int_{-\infty}^{s} f_S(t)\,\mathrm{d}t.$$

Si $s \leqslant 0$, on obtient

$$F_S(s) = \int_{-\infty}^{s} f_S(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{s} \frac{\mathbf{e}^t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathbf{e}^s}{2}$$

alors que si $s > 0$,

$$F_S(s) = \int_{-\infty}^{0} \frac{\mathbf{e}^t}{2}\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{s} \frac{\mathbf{e}^{-t}}{2}\,\mathrm{d}t = 1 - \frac{\mathbf{e}^{-s}}{2}.$$

La fonction de répartition de S est donc donnée par :

$$F_S : s \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} \mathbf{e}^s/2 & \text{si } s \leqslant 0 \\ 1 - \mathbf{e}^{-s}/2 & \text{si } s > 0 \end{cases}.$$

Cette loi s'appelle la loi de Laplace de paramètre 1.

Exercice 13

Question 3.a

On a :

$$Q = \frac{X}{Y} = \frac{r\mathbf{e}^U}{r\mathbf{e}^{-V}} = \mathbf{e}^{U+V} = \mathbf{e}^S.$$

Ainsi Q est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Par suite, $\mathbb{P}(Q \leqslant q) = 0$ pour $q \leqslant 0$. Pour $q > 0$, on a $\mathbb{P}(Q \leqslant q) = \mathbb{P}(S \leqslant \ln q) = F_S(\ln q)$. D'où la fonction de répartition de Q :

$$F_Q : q \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } q \leqslant 0 \\ \frac{q}{2} & \text{si } 0 < q \leqslant 1 \\ 1 - \frac{1}{2q} & \text{si } q > 1 \end{cases}.$$

Cette fonction étant continue sur $\mathbb{R}$ (même en 0 et en 1) et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, la variable Q est à densité donnée par :

$$f_Q : q \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } q \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 0 < q \leqslant 1 \\ \frac{1}{2q^2} & \text{si } q > 1 \end{cases}.$$

Exercice 13

Question 3.b

La variable aléatoire Q admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_Q(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Or

$$\forall q \geqslant 1, \quad q f_Q(q) = \frac{1}{2q}$$

si bien que l'intégrale $\int_1^{+\infty} t f_Q(t)\,\mathrm{d}t$ diverge comme intégrale de Riemann. La variable Q n'admet donc pas d'espérance.

Exercice 16

Question 1

Puisque X est à valeurs positives, la fonction de répartition F de X vérifie :

$$\forall x < 0, \quad F(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) = 0.$$

En tout point $x \in \mathbb{R}_-^*$ tel que $f(x) = F'(x)$, donc pour tout $x < 0$ sauf peut-être pour un nombre fini de valeurs de x, on a de ce fait $f(x) = 0$. **Si l'on suppose de plus f continue sur $\mathbb{R}_-^*$**, on en déduit que f est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$.

Exercice 16

Question 2

La variable Y prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathbb{P}(Y = n) = \mathbb{P}(n \leqslant X < n+1) = \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 16

Question 3

La variable Y admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum n\,\mathbb{P}(Y = n)$ converge (absolument). Cela signifie que la suite de ses sommes partielles, de terme général

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k\,\mathbb{P}(Y = k), \quad n \in \mathbb{N},$$

converge ou encore, puisque la série est à termes positifs, que la suite (S_n) est majorée.

De même, la variable X admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Cela revient à ce que la fonction

$$G : x \longmapsto \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t$$

admette une limite finie en $+\infty$ ou encore, par positivité de la fonction $g : t \longmapsto t f(t)$, que la fonction G soit majorée.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a par positivité de f :

$$k\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} tf(t)\,\mathrm{d}t \leqslant (k+1)\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t$$

c'est-à-dire, d'après la question **2.**,

$$k\,\mathbb{P}(Y=k) \leqslant \int_k^{k+1} tf(t)\,\mathrm{d}t \leqslant (k+1)\,\mathbb{P}(Y=k).$$

En sommant ces inégalités, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \sum_{k=0}^{n} k\,\mathbb{P}(Y=k) \leqslant \int_0^{n+1} tf(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=0}^{n}(k+1)\,\mathbb{P}(Y=k)$$

d'où (la série de droite étant convergente) :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad S_n \leqslant G(n+1) \leqslant S_n + \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}(Y=k) = S_n + 1. \qquad (\star)$$

- Si X admet une espérance, la fonction G est alors majorée et il en va donc de même de la suite (S_n) d'après les inégalités $(\star)$, ce qui signifie que Y admet une espérance.
- Si Y admet une espérance, alors (S_n) est majorée d'où, en notant M un majorant, toujours d'après $(\star)$ et par croissance de G :

  $$\forall x \geqslant 0,\quad G(x) \leqslant G(\lfloor x\rfloor + 1) \leqslant S_{\lfloor x\rfloor} + 1 \leqslant M + 1.$$

  Ainsi la fonction G est majorée et X admet une espérance.

Ainsi X admet une espérance si, et seulement si, Y admet une espérance et dans ces conditions, en passant à la limite $(n \to \infty)$ dans $(\star)$, il vient :

$$\mathbb{E}(Y) \leqslant \mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y) + 1.$$

Remarque. La question **3.** peut être traitée beaucoup plus rapidement.
Des inégalités $0 \leqslant Y \leqslant X < Y+1$ et du théorème d'existence d'espérance par domination, on déduit que X admet une espérance si, et seulement si, Y admet une espérance et alors, par croissance de l'espérance, $\mathbb{E}(Y) \leqslant \mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y) + 1$.

Exercice 16

Question 4.a

La variable X, qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, a pour densité

$$f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.$$

D'après la question **2.**, la loi de Y est donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \mathbb{P}(Y=n) = \int_n^{n+1} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = (1-\mathrm{e}^{-\lambda})\mathrm{e}^{-\lambda n}.$$

Puisque X admet une espérance, il en va de même de Y d'après **3.**. Plus précisément,

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{n=0}^{\infty} n\,\mathbb{P}(Y=n) = (1-\mathrm{e}^{-\lambda})\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty} n(\mathrm{e}^{-\lambda})^{n-1} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}$$

par sommation d'une série géométrique dérivée de raison $q = \mathrm{e}^{-\lambda}$ telle que $|q| < 1$.

Exercice 16

Question 4.b

De l'inégalité $\lfloor X\rfloor \leqslant X < \lfloor X\rfloor + 1$, on déduit que $0 \leqslant Z < 1$ et donc que $\mathbb{P}(Z \leqslant z) = 0$ pour $z < 0$ alors que $\mathbb{P}(Z \leqslant z) = 1$ pour $z \geqslant 1$. Pour $0 \leqslant z < 1$, l'utilisation du système complet associé à $\lfloor X\rfloor$ permet d'écrire :

$$[Z \leqslant z] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [n \leqslant X \leqslant n+z]$$

d'où, puisque l'union est disjointe,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z \leqslant z) &= \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(n \leqslant X \leqslant n+z) = \sum_{n=0}^{\infty}\int_n^{n+z}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t \\ &= (1-\mathrm{e}^{-\lambda z})\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda n} = \frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda z}}{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}.\end{aligned}$$

Ainsi Z a pour fonction de répartition

$$F : z \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } z < 0 \\ \frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda z}}{1-\mathrm{e}^{-\lambda}} & \text{si } 0 \leqslant z < 1 \\ 1 & \text{si } z \geqslant 1 \end{cases}.$$

Cette fonction étant continue sur $\mathbb{R}$ (même en 0 et 1) et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, la variable Z est à densité donnée par

$$f_Z : z \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} \frac{\lambda\mathrm{e}^{-\lambda z}}{1-\mathrm{e}^{-\lambda}} & \text{si } 0 < z < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

La variable Z, (presque sûrement) bornée, admet alors une espérance que l'on peut calculer par une intégration par parties :

$$\mathbb{E}(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf_Z(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}\int_0^1 \lambda t\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda} - \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}$$

ou par linéarité de l'espérance puisque X et Y admettent chacune une espérance :

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X-Y) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y) = \frac{1}{\lambda} - \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}.$$

et ce bien que X soit à densité et Y discrète.

Exercice 17

Question 1.a

Les variables X et Y ont pour densité commune

$$f_X = f_Y : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On montre sans difficulté (cela a été établi dans la question 2.b. de l'exercice 11 et ce sera une conséquence de théorèmes opératoires sur les lois uniformes qui seront développés dans le chapitre sur les lois à densité usuelles) que la variable $-Y$ suit la loi uniforme sur $[-1,0]$: elle admet pour densité

$$f_{-Y} : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Ces densités étant bornées et les variables X et $-Y$ indépendantes (car X et Y le sont), leur somme $X - Y$ est à densité donnée par le produit de convolution

$$f_X \star f_{-Y} : x \in \mathbb{R} \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)f_{-Y}(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

Pour mener ce calcul, on remarque que $f_X(t)f_{-Y}(x-t) \neq 0$ équivaut à $0 \leqslant t \leqslant 1$ et $-1 \leqslant x - t \leqslant 0$ c'est-à-dire à $t \in [0,1] \cap [x, x+1]$. On est donc conduit à distinguer trois cas pour le calcul de l'intégrale $f_X \star f_{-Y}(x)$:

- si $x < -1$ ou $x > 1$ alors $[0,1] \cap [x,x+1] = \emptyset$ donc $f_X \star f_{-Y}(x) = 0$;
- si $-1 \leqslant x \leqslant 0$, alors $[0,1] \cap [x,x+1] = [0,x+1]$ et donc

  $$f_X \star f_{-Y}(x) = \int_0^{x+1}\mathrm{d}t = x+1 ;$$

- si $0 \leqslant x \leqslant 1$, alors $[0,1] \cap [x,x+1] = [x,1]$ et donc

  $$f_X \star f_{-Y}(x) = \int_x^1 \mathrm{d}t = 1 - x.$$

En conclusion, la variable aléatoire $X - Y$ est à densité donnée par :

$$f_{X-Y} : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 1+x & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ 1-x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Exercice 17
Question 1.b

On détermine la fonction de répartition de la variable U. Celle-ci étant à valeurs positives, on a tout d'abord $\mathbb{P}(U \leqslant u) = 0$ si $u < 0$. Puis, pour $u \geqslant 0$,

$$\mathbb{P}(U \leqslant u) = \mathbb{P}(|X - Y| \leqslant u) = \mathbb{P}(-u \leqslant X - Y \leqslant u) = \int_{-u}^{u} f_{X-Y}(t)\,\mathrm{d}t.$$

On est ici encore amené à distinguer deux cas :

- si $0 \leqslant u \leqslant 1$, alors $[-u, u] \subset [-1, 1]$ donc :
$$\mathbb{P}(U \leqslant u) = \int_{-u}^{0} (1+t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{u} (1-t)\,\mathrm{d}t = 2u - u^2\,;$$
- si $u > 1$,
$$\mathbb{P}(U \leqslant u) = \int_{-1}^{0} (1+t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{1} (1-t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

Ainsi U admet pour fonction de répartition

$$F_U : u \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } u < 0 \\ 2u - u^2 & \text{si } 0 \leqslant u \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } u > 1 \end{cases}.$$

Celle-ci est continue sur $\mathbb{R}$ (même en 0 et 1) et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. La variable aléatoire U est donc à densité donnée par :

$$f_U : u \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 2(1-u) & \text{si } 0 \leqslant u \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Exercice 17
Question 2

À partir du moment où la première personne parmi A et B sort, la seconde reste au guichet un temps égal à $|X - Y|$. L'événement E : « C est la dernière personne à sortir » est donc réalisé si, et seulement si, $|X - Y| \leqslant Z$. On en déduit bien que $E = [U - Z \leqslant 0]$.

Pour déterminer la probabilité de cet événement, on cherche la loi de la variable aléatoire $U - Z$. Tout d'abord, les variables Y et Z étant de mêmes lois, la loi de $-Z$ est la même que celle de $-Y$ déterminée en **1.a.**. Par ailleurs, les variables X, Y et Z étant mutuellement indépendantes par hypothèse, les variables $U = \varphi(X, Y)$ et $-Z = \psi(Z)$ sont indépendantes d'après le cours.

On obtient alors, en raisonnant comme en **1.a.** (les supports des densités étant les mêmes), que la variable $U - Z$ est à densité donnée par $f_{U-Z} = f_U \star f_{-Z}$ avec (seule l'expression de cette densité sur $\mathbb{R}_-$ est utile pour la suite) :

- si $x < -1$, alors $f_{U-Z}(x) = 0$;
- si $-1 \leqslant x \leqslant 0$, alors
$$f_{U-Z}(x) = \int_{-1}^{x} (2 - 2t)\,\mathrm{d}t = 1 - x^2.$$

D'où la probabilité de l'événement E :

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(U - Z \leqslant 0) = \int_{-\infty}^{0} f_{U-Z}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{0} (1 - t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}.$$

Exercice 17
Question 3

Les variables X et Y étant indépendantes et de même loi on a, pour tout $v \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(V \leqslant v) &= 1 - \mathbb{P}(\min(X, Y) > v) = 1 - \mathbb{P}(X > v, Y > v) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X > v)\mathbb{P}(Y > v) = 1 - (1 - F_X(v))^2.\end{aligned}$$

Ainsi la variable V admet pour fonction de répartition

$$F_V : v \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } v < 0 \\ 2v - v^2 & \text{si } 0 \leqslant v \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } v > 1 \end{cases}.$$

On constate que U et V ont des fonctions de répartition identitiques. Comme la fonction de répartition caractérise la loi, on en déduit que U et V ont même loi.

Exercice 17
Question 4.a

Le temps passé par C à la poste est $T = V + Z$. Par un argument similaire à celui utilisé en **2.**, on en justifie que T est une variable à densité donnée par

$$f_T = f_V \star f_Z : t \in \mathbb{R} \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_V(v) f_Z(t - v)\,\mathrm{d}v$$

où $f_V = f_U$ puisque U et V suivent la même loi d'après **3.**. Pour que $f_V(v) f_Z(t - v) \neq 0$, il faut que $0 \leqslant v \leqslant 1$ et $0 \leqslant t - v \leqslant 1$ c'est-à-dire que $v \in [0, 1] \cap [t - 1, t]$, ce qui conduit à distinguer trois cas :

- si $t < 0$ ou $t > 2$, alors $[0, 1] \cap [t - 1, t] = \emptyset$ et $f_T(t) = 0$;
- si $0 \leqslant t \leqslant 1$, alors $[0, 1] \cap [t - 1, t] = [0, t]$ et
$$f_T(t) = \int_{0}^{t} 2(1 - v)\,\mathrm{d}v = 2t - t^2\,;$$

- si $1 \leqslant t \leqslant 2$, alors $[0, 1] \cap [t - 1, t] = [t - 1, 1]$ et
$$f_T(t) = \int_{t-1}^{1} 2(1 - v)\,\mathrm{d}v = t^2 - 4t + 4.$$

En conclusion, T a pour densité la fonction

$$f_T : t \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 2t - t^2 & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ t^2 - 4t + 4 & \text{si } 1 \leqslant t \leqslant 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Exercice 17
Question 4.b

Le temps moyen passé par C à la poste est donné par l'espérance de T, qui existe puisque T est presque sûrement bornée (à valeurs dans $[0, 2]$). Le calcul donne :

$$\mathbb{E}(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_T(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{1} t(2t - t^2)\,\mathrm{d}t + \int_{1}^{2} t(t^2 - 4t + 4)\,\mathrm{d}t = \frac{5}{6}.$$

Exercice 18

Question 1

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Le résultat s'obtient par intégration par parties sur le segment $[0, x]$, en dérivant $t \longmapsto 1 - F(t)$ en $-f$ et en primitivant $t \longmapsto 1$ en $t \longmapsto t$:

$$\begin{aligned}\int_0^x \big(1 - F(t)\big)\,\mathrm{d}t &= \big[t\big(1 - F(t)\big)\big]_0^x + \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t \\ &= x\big(1 - F(x)\big) + \varphi(x).\end{aligned}$$

Exercice 18

Question 2

Si l'intégrale $\int_0^{+\infty} \big(1 - F(t)\big)\,\mathrm{d}t$ converge alors, puisque $F \leqslant 1$:

$$\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t = \varphi(x) \leqslant \int_0^x \big(1 - F(t)\big)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} \big(1 - F(t)\big)\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi les intégrales partielles de l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$ sont majorées et, comme la fonction $t \longmapsto tf(t)$ est positive, cela entraîne la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$, i.e. l'existence de l'espérance de X.

Réciproquement, si X admet une espérance, alors

$$\forall x \geqslant 0, \quad 0 \leqslant x\big(1 - F(x)\big) = x\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

comme queue d'une intégrale convergente. On en déduit par encadrement que $x\big(1 - F(x)\big)$ tend vers 0 lorsque $x \to +\infty$.
Il résulte alors de la formule obtenue en **1.** que

$$\int_0^x \big(1 - F(t)\big)\,\mathrm{d}t = x\big(1 - F(x)\big) + \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x \to +\infty]{} \int_0^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t = \mathbb{E}(X).$$

D'où la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \big(1 - F(t)\big)\,\mathrm{d}t$ avec la formule :

$$\int_0^{+\infty} \big(1 - F(t)\big)\,\mathrm{d}t = \mathbb{E}(X).$$

Exercice 18

Question 3.a

Par indépendance des variables $X_1, \dots, X_n$, il vient :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}(M_n \leqslant x) &= \mathbb{P}\big(\max(X_1, \dots, X_n) \leqslant x\big) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \leqslant x, \dots, X_n \leqslant x) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \leqslant x) \cdots \mathbb{P}(X_n \leqslant x)\end{aligned}$$

et M_n admet donc pour fonction de répartition

$$F_{M_n} : x \in \mathbb{R} \longmapsto F_{X_1}(x)^n = \begin{cases}(1 - \mathbf{e}^{-\lambda x})^n & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}.$$

Cette fonction de répartition étant continue sur $\mathbb{R}$ (même en 0) et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, la variable M_n est à densité.

Exercice 18

Question 3.b

Il vient, d'après la formule du binôme :

$$\forall x \geqslant 0, \quad 1 - F(x) = 1 - (1 - \mathbf{e}^{-\lambda x})^n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{k+1} \mathbf{e}^{-\lambda k x}$$

si bien que l'intégrale ci-dessous converge comme somme d'intégrales convergentes, et M_n admet donc pour espérance d'après **2.** :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M_n) &= \int_0^{+\infty} \big(1 - F(t)\big)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{k+1} \int_0^{+\infty} \mathbf{e}^{-\lambda k t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.\end{aligned}$$

Remarque. On peut aussi écrire, en factorisant $a^n - b^n$:

$$\forall x \geqslant 0, \quad 1 - F(x) = \mathbf{e}^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{n-1} (1 - \mathbf{e}^{-\lambda x})^k$$

pour obtenir

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M_n) &= \int_0^{+\infty} \big(1 - F(t)\big)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{+\infty} \mathbf{e}^{-\lambda t} (1 - \mathbf{e}^{-\lambda t})^k\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{(1 - \mathbf{e}^{-\lambda t})^{k+1}}{(k+1)\lambda}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.\end{aligned}$$

Exercice 19

On peut noter pour commencer que la densité f étant supposée continue sur $\mathbb{R}_+$, la fonction de répartition F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. En effet, le cours assure que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad F(t) = \int_{-\infty}^t f(u)\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^1 f(u)\,\mathrm{d}u + \int_1^t f(u)\,\mathrm{d}u$$

si bien, d'après le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral appliqué à f continue sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$, que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $F'(t) = f(t)$ pour tout $t > 0$.
Il convient également de faire remarquer que, puisque la variable aléatoire X est à densité, on a $F(t) = \mathbb{P}(X \leqslant t) = \mathbb{P}(X < t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Plus généralement, on pourra considérer les probabilités d'événements construits à partir d'encadrements sur X, sans se soucier de savoir si les inégalités sont strictes ou larges.

Exercice 19

Question 1.a

Soient $t, h \in \mathbb{R}_+^*$. On peut noter pour commencer qu'il est possible de conditionner par l'événement $[X > t]$ puisque celui-ci est de probabilité non nulle. En effet, puisque $F'(x) = f(x) > 0$ pour tout $x > 0$ par hypothèse, la fonction F est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Ayant pour limite 1 en $+\infty$, on a donc $\mathbb{P}(X > t) = 1 - F(t) > 0$ pour tout $t > 0$.
Dans ces conditions, la probabilité $p(t, h)$ que le composant tombe en panne avant l'instant $t + h$ sachant qu'il fonctionnait encore à l'instant t est la probabilité conditionnelle

$$p(t, h) = \mathbb{P}_{[X > t]}(X \leqslant t + h) = \frac{\mathbb{P}(t < X \leqslant t + h)}{\mathbb{P}(X > t)} = \frac{F(t + h) - F(t)}{1 - F(t)}.$$

Exercice 19

Question 1.b

Puisque F est dérivable en t d'après la remarque préliminaire, avec $F'(t) = f(t) > 0$, on a

$$F(t+h) = F(t) + hf(t) + o(h), \quad h \to 0$$

d'où, d'après **a.**,

$$p(t,h) = \frac{hf(t) + o(h)}{1 - F(t)} \sim \frac{hf(t)}{1 - F(t)}, \quad h \to 0.$$

Exercice 19

Question 2.a

Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$ donné, la fonction λ_X est continue sur le segment $[0, t]$. De plus, $F' = f$ sur $]0, t]$ d'après la remarque préliminaire, d'où :

$$\int_0^t \lambda_X(u)\,\mathrm{d}u = \int_{\to 0}^t \frac{F'(u)}{1 - F(u)}\,\mathrm{d}u = \big[-\ln|1 - F(u)|\big]_{\to 0}^t = -\ln\big(1 - F(t)\big)$$

puisque $1 - F(t) > 0$ comme on l'a déjà fait remarqué en **1.a.** et

$$\lim_{t \to 0} F(t) = F(0) = \mathbb{P}(X \leqslant 0) = \int_{-\infty}^0 f(u)\,\mathrm{d}u = 0$$

étant donné que F est continue sur $\mathbb{R}$ et que f est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$.
Par suite,

$$\forall t > 0, \quad F(t) = 1 - \exp\Big(-\int_0^t \lambda_X(u)\,\mathrm{d}u\Big).$$

Comme par ailleurs $F(t) = 0$ pour tout $t \leqslant 0$ étant donné que f est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, le taux de panne de X détermine ainsi la fonction de répartition de X et donc sa loi.

Exercice 19

Question 2.b

Si X suit une loi exponentielle de paramètre α, elle a pour densité

$$f : t \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \alpha \mathbf{e}^{-\alpha t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases},$$

qui est bien nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, strictement positive en tout point de $\mathbb{R}_+^*$ et continue sur $\mathbb{R}_+$. Sa fonction de répartition est donnée par

$$F : t \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - \mathbf{e}^{-\alpha t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

et le taux de panne est constant :

$$\forall t > 0, \quad \lambda_X(t) = \frac{\alpha \mathbf{e}^{-\alpha t}}{1 - (1 - \mathbf{e}^{-\alpha t})} = \alpha.$$

Réciproquement, si le taux de panne est constant égal à α, alors d'après **a.** :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - \exp\Big(-\displaystyle\int_0^t \alpha\,\mathrm{d}u\Big) = 1 - \mathbf{e}^{-\alpha t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

et l'on reconnaît la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre α, qui est donc la loi de X.

Remarque. Il n'est en fait pas nécessaire de détailler les calculs à ce point pour la réciproque. En effet, si le taux de panne est constant égal à α, alors d'après le premier point, le taux de panne est celui d'une loi exponentielle de paramètre α et, comme le taux de panne caractérise la loi comme on l'a vu en **a.**, cela suffit pour conclure que X suit une loi exponentielle de paramètre α.

Exercice 19

Question 3.a

L'appareil survit plus d'un an si, et seulement si, l'événement $[X \geqslant 1]$ est réalisé. Sa probabilité se calcule à l'aide de la fonction de répartition de X, qui est déterminée d'après le taux de panne d'après la question **a.** :

$$\begin{aligned} \forall t > 0, \quad F(t) &= 1 - \exp\Big(-\int_0^t \lambda_X(u)\,\mathrm{d}u\Big) \\ &= 1 - \exp\Big(-\int_0^t u^3\,\mathrm{d}u\Big) = 1 - \mathbf{e}^{-t^4/4}. \end{aligned}$$

La probabilité recherchée est donc

$$\mathbb{P}(X \geqslant 1) = 1 - F(1) = \mathbf{e}^{-1/4}.$$

Exercice 19

Question 3.b

Il s'agit de calculer :

$$\mathbb{P}_{[X \geqslant 1]}(X \geqslant 3) = \frac{P(X \geqslant 1, X \geqslant 3)}{\mathbb{P}(X \geqslant 1)} = \frac{\mathbb{P}(X \geqslant 3)}{\mathbb{P}(X \geqslant 1)} = \frac{1 - F(3)}{1 - F(1)} = \mathbf{e}^{-20},$$

car $[X \geqslant 3] \subset [X \geqslant 1]$.

Exercice 20

Question 1