Travaux dirigés

Diagonalisation

ECS2 – Lycée La Bruyère, Versailles

Année 2017/2018

Exercice 1

Question 1

On observe que $M^2 = M + 2I_3$. Après un calcul au brouillon, on envisage les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par leurs termes initiaux $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ et les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n \\ b_{n+1} = 2a_n \end{cases}.$$

On démontre alors par récurrence que $M^n = a_n M + b_n I_3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- On a $a_0 M + b_0 I_3 = I_3 = M^0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $M^n = a_n M + b_n I_3$. En utilisant $M^2 = M + 2I_3$, il vient :
$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M(a_n M + b_n I_3) = a_n(M + 2I_3) + b_n M \\ &= (a_n + b_n)M + 2a_n I_3 = a_{n+1}M + b_{n+1}I_3, \end{aligned}$$
et le résultat se propage au rang $n+1$.

D'après le principe de récurrence, on a donc $M^n = a_n M + b_n I_3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque. On peut expliciter (a_n) et (b_n) en remarquant que les relations de récurrence impliquent :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+1} = a_n + b_n = a_n + 2a_{n-1}.$$

La suite (a_n) est ainsi solution d'une équation récurrente linéaire du second ordre à coefficient constants que l'on sait résoudre : puisque l'équation caractéristique associée $r^2 - r - 2 = 0$ admet deux solutions distinctes -1 et 2, il existe des constantes α et β telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \alpha(-1)^n + \beta 2^n.$$

À l'aide des conditions initiales $a_0 = 0$ et $a_1 = a_0 + b_0 = 1$, on obtient les valeurs de $\alpha = -\frac{1}{3}$ et $\beta = \frac{1}{3}$. On obtient finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$$

d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = 2a_{n-1} = \frac{2^n + 2(-1)^n}{3},$$

la relation étant encore valable pour $n = 0$.

Exercice 1

Question 2

Le polynôme $P = X^2 - X - 2$ annule la matrice M.

Pour $n \in \mathbb{N}$, la division euclidienne de X^n par P s'écrit $X^n = PQ_n + R_n$ où $\deg R_n < \deg P = 2$. Il existe donc $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ tels que $R_n = a_n X + b_n$ et alors :

$$M^n = P(M)Q_n(M) + R_n(M) = R_n(M) = a_n M + b_n I_3.$$

On peut déteminer facilement a_n et b_n tels que $X^n = PQ_n + R_n$. Pour cela, on évalue la relation précédente aux racines de P : -1 et 2. On obtient

$$\begin{cases} (-1)^n = -a_n + b_n \\ 2^n = 2a_n + b_n \end{cases} \iff \begin{cases} a_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3} \\ b_n = \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} \end{cases}.$$

Finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = \frac{2^n - (-1)^n}{3} M + \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} I_3.$$

Exercice 1

Question 3

Recherche des valeurs propres de M

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(M - \lambda I_3) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} &\underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + \lambda L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2}}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 1-\lambda^2 & 1+\lambda \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1+\lambda & -1-\lambda \end{pmatrix} \\ &\underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_3}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 2+\lambda-\lambda^2 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1+\lambda & -1-\lambda \end{pmatrix} = \begin{cases} 3 & \text{si } \lambda \notin \{-1, 2\} \\ 2 & \text{si } \lambda = 2 \\ 1 & \text{si } \lambda = -1 \end{cases}. \end{aligned}$$

La matrice M admet donc pour valeurs propres -1 et 2.

Remarque. Les calculs sont un peu plus simples avec les opérations suivantes, qui s'éloignent un peu de l'algorithme de Gauss pour utiliser le fait que la somme des coefficients de M est égale à 2 sur chaque colonne :

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(M - \lambda I_3) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} &\underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 2-\lambda & 2-\lambda & 2-\lambda \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &\underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1}}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \begin{cases} 3 & \text{si } \lambda \notin \{-1, 2\} \\ 2 & \text{si } \lambda = 2 \\ 1 & \text{si } \lambda = -1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Recherche d'une base de vecteurs propres

- Pour la valeur propre -1. Étant donné $X = {}^t\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$,
$$MX = -X \iff x + y + z = 0.$$
L'équation précédente est celle du plan dirigé par les vecteurs $V_1 = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $V_2 = {}^t\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
- Pour la valeur propre 2. Étant donné $X = {}^t\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$,
$$\begin{aligned} MX = 2X &\iff \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \\ &\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1}}{\iff} \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ 3x - 3y = 0 \\ -3x + 3y = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = x \\ z = x \end{cases} \end{aligned}$$
Ces équations définissent la droite dirigée par le vecteur $V_3 = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Remarque. En notant C_1, C_2 et C_3 les colonnes de M, on a :

$$\forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad M\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 C_1 + x_2 C_2 + x_3 C_3.$$

Lorsque les sommes des coefficients se trouvant sur une même ligne ont même valeur λ, on a donc :

$$M\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = C_1 + C_2 + C_3 = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

et l'on observe donc que le vecteur ${}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est propre pour M, associé à la valeur propre λ.

Diagonalisation de M

On vérifie (exercice !) que la famille (V_1, V_2, V_3) est libre. Formée de $3 = \dim \mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ vecteurs, c'est donc une base de $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. La matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

est donc inversible. Comme les vecteurs V_1, V_2, V_3 sont propres pour M associés aux valeurs propres -1, -1 et 2, on a de plus $MP = PD$ c'est-à-dire $P^{-1}MP = D$ en posant

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Remarque. On rédigera cet argument différemment une fois établis les résultats sur la diagonalisation.

Calcul des puissances de M

On a alors, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} M^n &= (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2(-1)^n + 2^n & -(-1)^n + 2^n & -(-1)^n + 2^n \\ -(-1)^n + 2^n & 2(-1)^n + 2^n & -(-1)^n + 2^n \\ -(-1)^n + 2^n & -(-1)^n + 2^n & 2(-1)^n + 2^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{2^n - (-1)^n}{3} M + \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} I_3. \end{aligned}$$

Exercice 1

Question 4

Les puissances de la matrice

$$\mathbb{1} = M + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

se calculent aisément : on a $\mathbb{1}^2 = 3\mathbb{1}$ d'où, par une récurrence immédiate, $\mathbb{1}^n = 3^{n-1}\mathbb{1}$ pour tout $n \geqslant 1$.

Il vient alors, d'après la formule du binôme, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} M^n = (\mathbb{1} - I_3)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathbb{1}^k (-I_3)^{n-k} \\ &= (-1)^n I_3 + \Big(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1} (-1)^{n-k} \Big) \mathbb{1} \\ &= (-1)^n I_3 + \frac{1}{3} \Big(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k (-1)^{n-k} - (-1)^n \Big) \mathbb{1} \\ &= (-1)^n I_3 + \frac{2^n - (-1)^n}{3} (M + I_3) \\ &= \frac{2^n - (-1)^n}{3} M + \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} I_3. \end{aligned}$$

Exercice 2

Question 1

Éléments propres de A

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(A - \lambda I_3) &= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 & -1 \\ -3 & 4-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &\underset{L_2 \leftarrow 2L_2 - (4-\lambda)L_1}{=} \operatorname{rg} \begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 & -1 \\ -2 + 3\lambda - \lambda^2 & 0 & 2-\lambda \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \end{aligned}$$

si bien que $\operatorname{rg}(A - \lambda I_3) < 3$ si, et seulement si, $\lambda \in \{1, 2\}$. La matrice A admet donc pour valeurs propres 1 et 2.

Pour avancer la résolution des systèmes linéaires $(A - \lambda I_3)X = 0$, on utilise les mêmes opérations *sur les lignes* que pour le calcul du rang :

- Pour $X = {}^t(x \quad y \quad z) \in \mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$,

$$AX = X \iff \begin{cases} -2x + 2y - z = 0 \\ z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$$

  Ces équations définissent la droite dirigée par le vecteur ${}^t(1 \quad 1 \quad 0)$.

- Pour $X = {}^t(x \quad y \quad z) \in \mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$,

$$AX = 2X \iff -3x + 2y - z = 0.$$

  Ces équations définissent le plan dirigé par les vecteurs ${}^t(1 \quad 0 \quad -3)$ et ${}^t(0 \quad 1 \quad 2)$.

Les trois vecteurs (dont on vérifie qu'ils sont linéairement indépendants) composent donc une base de $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de colonnes propres de A. Dans ces conditions, la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

est inversible et l'on a

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Remarque. On rédigera cet argument différemment une fois établis les résultats sur la diagonalisation.

Exercice 2

Question 2

Pour $M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} AM + MA = 0 &\iff PDP^{-1}M + MPDP^{-1} = 0 \\ &\iff DP^{-1}MP + P^{-1}MPD = 0 \\ &\iff DN + ND = 0 \end{aligned}$$

où $N = P^{-1}MP$ (c'est-à-dire $M = PNP^{-1}$).

La matrice D s'écrit par blocs :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2I_2 \end{pmatrix}.$$

On décompose N par blocs selon le même schéma que D (afin de pouvoir mener des calculs par blocs) :

$$N = \begin{pmatrix} x & L \\ C & X \end{pmatrix}, \qquad X \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R}), C \in \mathbf{M}_{2,1}(\mathbb{R}), L \in \mathbf{M}_{1,2}(\mathbb{R}), x \in \mathbb{R}.$$

On a alors :

$$DN + ND = \begin{pmatrix} x & L \\ 2C & 2X \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & 2L \\ C & 2X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 3L \\ 3C & 4X \end{pmatrix}.$$

Il apparaît alors clairement que la seule matrice N telle que $DN + ND = 0$ est la matrice $N = 0$. On en déduit que la seule matrice M telle que $AM + MA = 0$ est la matrice $M = 0$.

Exercice 3

Question 1.a

Recherche des valeurs propres de A

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(A - \lambda I_3) &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -5-2\lambda & 6 & 3 \\ -3 & 4-2\lambda & 3 \\ -3 & 6 & 1-2\lambda \end{pmatrix} \\
&\underset{\substack{L_1 \leftarrow 3L_1 - (5+2\lambda)L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2}}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & -2+2\lambda+4\lambda^2 & -6-6\lambda \\ -3 & 4-2\lambda & 3 \\ 0 & 2+2\lambda & -2-2\lambda \end{pmatrix} \\
&\underset{L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & -8-4\lambda+4\lambda^2 & 0 \\ -3 & 4-2\lambda & 3 \\ 0 & 2+2\lambda & -2-2\lambda \end{pmatrix} \\
&= \begin{cases} 3 & \text{si } \lambda \notin \{-1, 2\} \\ 2 & \text{si } \lambda = 2 \\ 1 & \text{si } \lambda = -1 \end{cases}.
\end{aligned}$$

La matrice A admet donc pour valeurs propres -1 et 2.

Remarque. Les calculs sont un peu plus simples avec les opérations suivantes, qui s'éloignent un peu de l'algorithme de Gauss pour utiliser le fait que la somme des coefficients de M est égale à 4 sur chaque ligne :

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(A - \lambda I_3) &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -5-2\lambda & 6 & 3 \\ -3 & 4-2\lambda & 3 \\ -3 & 6 & 1-2\lambda \end{pmatrix} \\
&\underset{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 4-2\lambda & 6 & 3 \\ 4-2\lambda & 4-2\lambda & 3 \\ 4-2\lambda & 6 & 1-2\lambda \end{pmatrix} \\
&\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 4-2\lambda & 6 & 3 \\ 0 & -2-2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2-2\lambda \end{pmatrix} \\
&= \begin{cases} 3 & \text{si } \lambda \notin \{-1, 2\} \\ 2 & \text{si } \lambda = 2 \\ 1 & \text{si } \lambda = -1 \end{cases}.
\end{aligned}$$

Recherche d'une base de vecteurs propres

- Pour la valeur propre -1. Étant donné $X = {}^t\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$,

  $$AX = -X \iff -x + 2y + z = 0.$$

  L'équation précédent est celle du plan dirigé par les vecteurs $V_1 = {}^t\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $V_2 = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- Pour la valeur propre 2. Étant donné $X = {}^t\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$,

  $$AX = 2X \iff \begin{cases} -3x + 2y + z = 0 \\ -x + z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$$

  Ces équations définissent la droite dirigée par le vecteur $V_3 = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Diagonalisation de A

On vérifie (exercice !) que les vecteurs V_1, V_2 et V_3 sont linéairement indépendants. Ils forment donc une famille libre à $3 = \dim \mathbb{R}^3$ éléments, c'est-à-dire une base de $\mathbb{R}^3$. La matrice

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

est donc inversible. Comme les vecteurs V_1, V_2 et V_3 sont par ailleurs propres pour A, associés aux valeurs propres -1, -1 et 2, on a de plus $AP = PD$ c'est-à-dire $P^{-1}AP = D$ où

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3

Question 1.b

Il vient, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
A^n &= (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3(-1)^n - 2^n & -2(-1)^n + 2 \cdot 2^n & -(-1)^n + 2^n \\ (-1)^n - 2^n & 2 \cdot 2^n & -(-1)^n + 2^n \\ (-1)^n - 2^n & -2(-1)^n + 2 \cdot 2^n & (-1)^n + 2^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Exercice 3

Question 2.a

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = AX_n + B.$$

Exercice 3

Question 2.b

La matrice $I_3 - A$ est inversible car 1 n'est pas valeur propre de A d'après **1.a.**.

Exercice 3

Question 2.c

D'après **b.**, on a pour tout $U \in \mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

$$U = AU + B \iff (I_3 - A)U = B \iff U = (I_3 - A)^{-1}B.$$

La résolution du système précédent conduit à :

$$U = (I_3 - A)^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3

Question 2.d

On considère la suite auxiliaire de terme général $Y_n = X_n - U$, $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad Y_{n+1} = X_{n+1} - U = (AX_n + B) - (AU + B) = A(X_n - U) = AY_n.$$

Ainsi la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique, d'où l'on déduit par une récurrence immédiate que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad Y_n = A^n Y_0$$

et donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = U + Y_n = U + A^n(X_0 - U).$$

D'après **1.b.** et **c.**,

$$X_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3(-1)^n - 2^n \\ 2 + (-1)^n - 2^n \\ (-1)^n - 2^n \end{pmatrix}$$

d'où les expressions, valables pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_n = \frac{3(-1)^n - 2^n}{2}, \quad y_n = 1 + \frac{(-1)^n - 2^n}{2}, \quad z_n = \frac{(-1)^n - 2^n}{2}.$$

Exercice 4

Question 1.a

La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

convient.

Exercice 4

Question 1.b

Recherche des valeurs propres de A

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(A - \lambda I_3) &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &\underset{L_3 \leftarrow L_3 - (2-\lambda)L_2}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -2 & \alpha & 0 \end{pmatrix} \quad \text{où } \alpha = -\lambda^2 + 2\lambda + 1 \\ &\underset{L_3 \leftarrow L_3 - \alpha L_1}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ \beta & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où

$$\beta = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 = -(\lambda + 1)(\lambda - 1)(\lambda - 2).$$

La matrice A admet donc pour valeurs propres -1, 1 et 2.

Vecteurs propres et diagonalisation de A

La résolution des systèmes $AX = -X$, $AX = X$ puis $AX = 2X$ (en utilisant les mêmes opérations *sur les lignes* que dans le calcul de $\operatorname{rg}(A - \lambda I_3)$ pour avancer la résolution du système $(A - \lambda I_3)X = 0$) conduit à une base de vecteurs propres :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

La matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

est donc inversible et l'on a :

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4

Question 2.a

Il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad Y_{n+1} = P^{-1}X_{n+1} = P^{-1}AX_n = (P^{-1}AP)(P^{-1}X_n) = DY_n.$$

Exercice 4

Question 2.b

On obtient par récurrence immédiate :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad Y_n = D^n Y_0$$

d'où l'on déduit l'expression de

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = PY_n = PD^n Y_0.$$

Exercice 4

Question 3

On calcule $Y_0 = P^{-1}X_0$ en résolvant le système $PY_0 = X_0$ d'inconnue $Y_0 = {}^t\begin{pmatrix} a & b & c\end{pmatrix}$:

$$\begin{cases} a+b+c=2 \\ -a+b+2c=-3 \\ a+b+4c=-1 \end{cases} \iff Y_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit l'expression de

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = PD^nY_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2(-1)^n + 1 - 2^n \\ -2(-1)^n + 1 - 2\cdot 2^n \\ 2(-1)^n + 1 - 4\cdot 2^n \end{pmatrix}.$$

puis celle de :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = 2(-1)^n + 1 - 2^n.$$

Exercice 5

Soit $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$. Sachant qu'une matrice et sa transposée ont même rang, on a pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} \lambda \text{ valeur propre de } A &\iff \operatorname{rg}(A - \lambda I_n) < n \\ &\iff \operatorname{rg}{}^t(A - \lambda I_n) < n \\ &\iff \operatorname{rg}({}^tA - \lambda I_n) < n \\ &\iff \lambda \text{ valeur propre de } {}^tA. \end{aligned}$$

Les matrices A et ${}^tA$ ont donc mêmes valeurs propres.

Exercice 6

Question 1

Soit λ une valeur propre complexe de A. Il existe une matrice colonne non nulle $X = {}^t\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n\end{pmatrix}$ telle que $AX = \lambda X$, c'est-à-dire :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j = \lambda x_i$$

ou encore :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \sum_{j \neq i} a_{i,j}x_j = (\lambda - a_{i,i})x_i.$$

En écrivant la relation précédente pour $i = i_0$ tel que $|x_{i_0}| = \max_i |x_i| > 0$, on obtient en particulier :

$$|\lambda - a_{i_0,i_0}| = \frac{1}{|x_{i_0}|}\left|\sum_{j\neq i_0} a_{i_0,j}x_j\right| \leqslant \sum_{j\neq i}|a_{i_0,j}|\frac{|x_j|}{|x_{i_0}|} \leqslant \sum_{j\neq i_0}|a_{i_0,j}| = r_{i_0}$$

si bien que $\lambda \in D'(a_{i_0,i_0}, r_{i_0})$, d'où le résultat.

Exercice 6

Question 2

D'après la question précédente, 0 n'appartient à aucun des disques $D(a_{i,i}, r_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, donc n'est pas valeur propre de A, ce qui signifie que A est inversible.

Exercice 6

Question 3.a

Le vecteur $X = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifie $AX = X$ et n'est pas nul. C'est donc un vecteur propre de A pour la valeur propre 1.

Exercice 6

Question 3.b

Faire un dessin !

Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de A alors, pour $i \in [\![1, n]\!]$, on a d'après **1.** :

$$|\lambda| \leqslant |\lambda - a_{i,i}| + |a_{i,i}| \leqslant r_i + a_{i,i} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1.$$

Exercice 6

Question 3.c

Faire un dessin !

On rappelle que dans l'inégalité triangulaire complexe :

$$\forall z, w \in \mathbb{C}, \quad |z + w| \leqslant |z| + |w|,$$

on a égalité si, et seulement si, il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $z = \alpha w$ ou $w = \alpha z$ (ce qui revient à dire que z et w ont même argument s'ils sont non nuls).

Si $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| = 1$ est valeur propre de A, alors on a égalité dans l'inégalité triangulaire de la question **b.** et il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\lambda - a_{i,i} = \alpha a_{i,i}$ de sorte que $\lambda = (1+\alpha)a_{i,i} \in \mathbb{R}_+^*$. On a alors $\lambda = |\lambda| = 1$, d'où le résultat.

Exercice 7

Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$,

$$\begin{aligned} \Delta(u) = \lambda u &\iff \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \lambda u_n \\ &\iff \exists \alpha \in \mathbb{K}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha\lambda^n \\ &\iff \exists \alpha \in \mathbb{K}, u = \alpha(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}. \end{aligned}$$

Tous les scalaires sont donc valeurs propres de Δ, avec pour sous-espace propre associé la droite dirigée par la suite géométrique $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 8

Pour montrer que $v \circ u^k - u^k \circ v = ku^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on raisonne par récurrence.

- Le résultat est vrai pour $k = 1$ par hypothèse.
- Étant donné k tel que $v \circ u^k - u^k \circ v = ku^k$, il vient :

$$\begin{aligned} v \circ u^{k+1} &= (v \circ u^k) \circ u = (u^k \circ v + ku^k) \circ u \\ &= u^k \circ (v \circ u) + ku^{k+1} = u^k \circ (u \circ v + u) + ku^{k+1} \\ &= u^{k+1} \circ v + (k+1)u^{k+1} \end{aligned}$$

  et le résultat se propage donc au rang $k+1$.

D'après le principe de récurrence, on a donc $v \circ u^k - u^k \circ v = ku^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ (et d'ailleurs aussi pour $k = 0$).

En notant D l'endomorphisme de $\mathbf{L}(E)$ défini par

$$D : w \longmapsto v \circ w - w \circ v,$$

la relation précédente s'écrit $D(u^k) = ku^k$ et signifie, si $u^k \neq 0$, que u^k est vecteur propre de D associé à la valeur propre k.
Or $\mathbf{L}(E)$ est de dimension finie et l'endomorphisme D ne peut donc admettre une infinité de valeurs propres, si bien qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $u^k = 0$.

Exercice 9

Soit u un endomorphisme nilpotent de $E \neq \{0\}$: il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $u^k = 0$.
Le polynôme X^k étant annulateur de u, les valeurs propres de u en sont des racines. Ainsi la seule valeur propre éventuelle de u est 0.
Réciproquement, si 0 n'était pas valeur propre de u, alors u et ses itérés seraient injectifs, en contradiction avec $u^k = 0$.
En conclusion, un endomorphisme nilpotent admet 0 pour seule valeur propre.

Exercice 10

Sachant λ^2 valeur propre de u^2, l'endomorphisme

$$u^2 - \lambda^2 \operatorname{id}_E = (u - \lambda \operatorname{id}_E) \circ (u + \lambda \operatorname{id}_E)$$

n'est pas inversible.
Puisqu'une composée d'endomorphismes inversibles est inversible, l'un au moins des endomorphismes $u - \lambda \operatorname{id}_E$ et $u + \lambda \operatorname{id}_E$ n'est pas inversible, ce qui signifie que λ ou $-\lambda$ est valeur propre de u.

Exercice 11

D'après le théorème du rang,

$$\dim E_0(f) = \dim(\operatorname{Ker} f) = n - \operatorname{rg} f = n - 1.$$

Si aucun des endomorphismes $f - \operatorname{id}$ et $f + \operatorname{id}$ n'était inversible, alors -1 et 1 seraient valeurs propres de f, mais on aurait alors

$$\begin{aligned} \dim\Big(\bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp}(f)} E_\lambda(f)\Big) &= \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(f)} \dim E_\lambda(f) \\ &\geqslant \dim E_0(f) + \dim E_1(f) + \dim E_{-1}(f) \\ &\geqslant (n-1) + 1 + 1 > n, \end{aligned}$$

ce qui serait absurde.
C'est donc que l'un au moins des endomorphismes $f - \operatorname{id}$ et $f + \operatorname{id}$ est inversible.

Exercice 12

Soit λ une valeur propre de $f \circ g$. Montrons qu'elle est également valeur propre de $g \circ f$.

- Si $\lambda \neq 0$, soit $x \in E \setminus \{0\}$ un vecteur propre de $f \circ g$ associé à la valeur propre λ : $f \circ g(x) = \lambda x$. En composant par g, on obtient $g \circ f\big(g(x)\big) = \lambda g(x)$ où nécessairement $g(x) \neq 0$ sans quoi $\lambda x = f\big(g(x)\big) = f(0) = 0$ alors que $\lambda \neq 0$ et $x \neq 0$. Ainsi $g(x)$ est vecteur propre de $g \circ f$ pour λ, qui est donc valeur propre de $g \circ f$.
- Pour le cas de $\lambda = 0$, il est plus simple de raisonner par contraposée : on suppose que 0 n'est pas valeur propre de $g \circ f$ et on montre alors que 0 n'est pas non plus valeur propre de $f \circ g$.
  En effet, si 0 n'est pas valeur propre de $g \circ f$, c'est que $g \circ f$ est inversible. Dans ces conditions, g est surjectif et f est injectif et, comme il s'agit d'endomorphismes d'un espace de dimension finie, f et g sont alors inversibles. L'endomorphisme $f \circ g$ est alors lui aussi inversible si bien que 0 n'en est pas valeur propre.

En échangeant les rôles de f et g, on obtient l'inclusion réciproque, d'où finalement l'égalité des spectres.

Exercice 13

Question 1

Comme la famille $\mathscr{F}$ est génératrice de F par définition, il suffit de vérifier qu'elle est libre pour justifier que c'est une base de F.
Or si $\lambda_0, \ldots, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ sont tels que $\sum_i \lambda_i f_i = 0$, alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{i=0}^{3} \lambda_i x^i = 0.$$

Ainsi le polynôme $\sum_i \lambda_i X^i$ est nul (il admet une infinité de racines) d'où la nullité de ses coefficients : $\lambda_0 = \cdots = \lambda_3 = 0$.

Exercice 13

Question 2

On s'assure que

$$\begin{aligned} u(f_j) : x \longmapsto & -j(j-1)x^{j-2}\mathbf{e}^{-x} + 3jx^{j-1}\mathbf{e}^{-x} - 2x^j\mathbf{e}^{-x} \\ &= -j(j-1)f_{j-2}(x) + 3jf_{j-1}(x) - 2f_j(x) \end{aligned}$$

appartient à F pour tout $j \in [\![0, 3]\!]$ (même pour $j = 0$ et $j = 1$). Comme par ailleurs la linéarité de u est évidente, on en déduit que u est un endomorphisme de F.

Exercice 13

Question 3

L'endomorphisme u est représenté en base $\mathscr{F}$ par la matrice triangulaire

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice triangulaire est inversible car tous ses coefficients diagonaux sont non nuls. L'endomorphisme u est donc inversible.
Les valeurs propres de la matrice triangulaire A se lisent sur sa diagonale : A admet -2 pour unique valeur propre. Si elle était diagonalisable, il existerait une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = -2I_4$, mais on aurait alors $A = P(-2I_4)P^{-1} = -2I_4$, ce qui est absurde. La matrice A et l'endomorphisme u ne sont donc pas diagonalisables.

Exercice 15

Question 1.a

L'application tr est une forme linéaire (cf. cours). Son image est un sous-espace de $\mathbb{R}$; il ne peut donc s'agir que de $\{0\}$ et de $\mathbb{R}$ mais comme tr n'est pas nulle (car $\operatorname{tr} I_n = n \neq 0$ par exemple), c'est donc que $\operatorname{Im} \operatorname{tr} = \mathbb{R}$.

Exercice 15

Question 1.b

D'après le théorème du rang et la question **a.**,

$$\dim(\operatorname{Ker} \operatorname{tr}) = \dim \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) - \operatorname{rg} \operatorname{tr} = n^2 - 1.$$

Remarque. On peut aussi remarquer que $\operatorname{Ker} \operatorname{tr}$ est un hyperplan de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ comme noyau de la forme linéaire non nulle tr.

Exercice 15

Question 1.c

Si $M \in \operatorname{Ker} \operatorname{tr} \cap \operatorname{Vect} I_n$, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $M = \alpha I_n$ et l'on a $0 = \operatorname{tr} M = n\alpha$ d'où $\alpha = 0$ puis $M = 0$. Ainsi les sous-espaces $\operatorname{Ker} \operatorname{tr}$ et $\operatorname{Vect} I_n$ sont en somme directe. Comme par ailleurs

$$\dim(\operatorname{Ker} \operatorname{tr}) + \dim(\operatorname{Vect} I_n) = n^2 = \dim \mathbf{M}_n(\mathbb{R}),$$

ils sont supplémentaires dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 15

Question 2.a

L'application f est linéaire par linéarité de la trace, et à valeurs dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. C'est donc un endomorphisme de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 15

Question 2.b

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} f(M) = \lambda M \quad &\iff \quad (\lambda - 1)M = (\operatorname{tr} M)I_n \\ &\implies \quad \Big((\lambda \neq 1 \text{ et } M \in \operatorname{Vect} I_n) \text{ ou } (\lambda = 1 \text{ et } \operatorname{tr} M = 0) \Big). \end{aligned}$$

Réciproquement,

- $\operatorname{tr} M = 0$ implique $f(M) = M$ et 1 est donc valeur propre de f car $n \geqslant 2$. Le sous-espace propre associé est l'hyperplan $\operatorname{Ker} \operatorname{tr}$.
- Les autres vecteurs propres éventuels sont sur la droite dirigée par I_n. Or $f(I_n) = (n+1)I_n$ donc la seule autre valeur propre possible est $n+1$, qui est effectivement valeur propre de f. Le sous-espace propre associé est $\operatorname{Vect} I_n$.

L'endomorphisme f admet donc 1 et $n+1$ pour valeurs propres.

Exercice 15

Question 2.c

Sachant que 0 n'est pas valeur propre, l'endomorphisme f est injectif. Puisqu'il s'agit d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie, il est donc bijectif : c'est un automorphisme de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.
D'après **b.** et **1.c.**, les sous-espaces propres de f sont supplémentaires dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, si bien que l'endomorphisme f est diagonalisable.
Remarque. Si l'énoncé n'avait pas fait démontré que $\operatorname{Ker} \operatorname{tr}$ et $\operatorname{Vect} I_n$ sont supplémentaires, il aurait suffi de faire remarquer que

$$\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(f)} \dim E_\lambda(f) = \dim E_1(f) + \dim E_{n+1}(f) = 1 + (n^2 - 1) = n^2 = \dim \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$$

pour conclure

Exercice 15

Question 3.a

Pour $M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$, on calcule :

$$tr\big(g(M)\big) = \operatorname{tr} M + (\operatorname{tr} M) \operatorname{tr} J = \operatorname{tr} M$$

d'où

$$g^2(M) = g(M) + \big(\operatorname{tr} g(M)\big)J = M + 2(\operatorname{tr} M)J = 2g(M) - M,$$

si bien que g est annulé par le polynôme $X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$.

Exercice 15

Question 3.b

Par théorème, les valeurs propres de g sont racines du polynôme annulateur obtenu en **a.** : l'endomorphisme g n'admet donc que 1 comme seule valeur propre éventuelle.
Réciproquement, $g(M) = M$ équivaut à $\operatorname{tr} M = 0$. Le réel 1 est donc bien valeur propre de g car $n \geqslant 2$ et le sous-espace propre associé est l'hyperplan $\operatorname{Ker} \operatorname{tr}$.

Exercice 15

Question 3.c

D'après **b.**,

$$\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} g} \dim E_\lambda(g) = \dim E_1(g) = n^2 - 1 < n^2 = \dim \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$$

et l'endomorphisme g n'est donc pas diagonalisable.

Exercice 16

Question 1

Vu les espaces de départ et d'arrivée des applications linéaires f, g, $f \circ g$ et $g \circ f$, on a $A \in \mathbf{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, $B \in \mathbf{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, $AB \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ et $BA \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 16

Question 2

Si $g \circ f$ était injectif, alors f le serait aussi (pour $x \in \mathbb{R}^3$, $f(x) = 0$ implique $g\big(f(x)\big) = 0$ donc $x = 0$) mais cela est impossible : étant donné que f est à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, $\operatorname{rg} f \leqslant 2 < 3$ alors que f est définie sur $\mathbb{R}^3$ de dimension 3.
Comme c'est un endomorpisme d'un espace de dimension finie, $g \circ f$ n'est pas non plus surjectif (ce qu'on aurait pu également justifier à la main).

Puisque l'endomorphisme $g \circ f$ n'est pas injectif, il admet 0 pour valeur propre, qui est donc également valeur propre de sa matrice BA.

Exercice 16

Question 3.a

Pour $X = {}^t\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \neq 0$, on a

$$A(BX) = (AB)X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \neq 0,$$

d'où nécessairement $BX \neq 0$.

Exercice 16

Question 3.b

Si λ est valeur propre de AB, il existe $X \in \mathbf{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tel que $ABX = \lambda X$. On a alors $(BA)(BX) = B(ABX) = \lambda(BX)$ avec $BX \neq 0$ d'après **a.**, si bien que λ est également valeur propre de BA.

Exercice 16

Question 3.c

Un calcul élémentaire met en évidence que la matrice AB admet deux valeurs propres 1 et -1, qui sont donc également valeurs propres de BA d'après **b.**.
D'après **2.**, la matrice BA admet également 0 pour valeur propre. La matrice BA, carrée d'ordre 3, admet donc trois valeurs propres distinctes, ce qui assure qu'elle est diagonalisable.

Exercice 17

Question 1

On identifie E à $\mathbf{M}_{4,1}(\mathbb{C})$ par l'isomorphisme

$${}^t\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \longmapsto x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4.$$

- L'image de f est engendrée par les vecteurs colonnes de M, donc par le seul vecteur ${}^t\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$. Comme ce dernier est non nul, il forme une base de $\operatorname{Im} f$ qui est donc de dimension $\operatorname{rg} f = 1$.
- D'après le théorème du rang,

  $$\dim(\operatorname{Ker} f) = \dim E - \operatorname{rg} f = 4 - 1 = 3.$$

  Comme $V_1 = {}^t\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $V_2 = {}^t\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $V_3 = {}^t\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ en sont $3 = \dim(\operatorname{Ker} f)$ vecteurs linéairement indépendants, ils en forment une base.
  Remarque. $\operatorname{Ker} f$ est l'hyperplan d'équation $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$.

Exercice 17

Question 2

- Puisque $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$ d'après **1.**, l'endomorphisme f admet 0 pour valeur propre, le sous-espace propre associé étant l'hyperplan $\operatorname{Ker} f$.
- Sachant (cf. exercice 20) que les vecteurs propres pour les valeurs propres non nulles sont à rechercher dans $\operatorname{Im} f$, les derniers vecteurs propres candidats sont les multiples non nuls de $V_4 = {}^t(a \quad 1 \quad 1 \quad a)$. Or le calcul donne $MV_4 = 2(a+1)V_4$, ce qui montre que f admet pour valeur propre $2(a+1)$ et que V_4 est une colonne propre associée.

Remarque. Pour obtenir la dernière valeur propre, on aurait aussi pu utiliser $\operatorname{tr} A$. Dans une base (V_1, V_2, V_3, W_4) de E obtenue par complétion de la base (V_1, V_2, V_3) de $\operatorname{Ker} f = E_0(f)$, l'endomorphisme f est représenté par une matrice de la forme

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & y_1 \\ 0 & 0 & 0 & y_2 \\ 0 & 0 & 0 & y_3 \\ 0 & 0 & 0 & y_4 \end{pmatrix}$$

où y_1, y_2, y_3, y_4 sont des complexes. Les matrices M et N, représentant l'endomorphisme f dans des bases distinctes, sont semblables et ont donc même trace, d'où l'on déduit que $y_4 = 2(a+1)$. Elles ont également mêmes valeurs propres, or celles de la matrice triangulaire N sont évidentes : 0 et $y_4 = 2(a+1)$.

Exercice 17

Question 3

- Si $2(a+1) = 0$ i.e. $a = -1$, alors M admet 0 pour seule valeur propre. Ainsi
$$\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} M} \dim E_\lambda(M) = \dim E_0(M) = 3 < 4 = \dim E$$
et M n'est donc pas diagonalisable.
- Si $2(a+1) \neq 0$ i.e. $a \neq -1$, alors M admet 0 et $2(a+1)$ pour valeurs propres avec
$$\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} M} \dim E_\lambda(M) = \dim E_0(M) + \dim E_{2(a+1)}(M) \geqslant 4$$
et M est donc diagonalisable. Dans ce cas, $E_{2(a+1)}(M)$ est une droite.

Puisque $\underline{V} = (V_1, V_2, V_3, V_4)$ est une base adaptée à la décomposition
$$\mathbf{M}_{4,1}(\mathbb{C}) = E_0(M) \oplus E_{2(a+1)}(M),$$
la matrice
$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & a \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$
de passage de la base $\underline{e}$ à la base $\underline{V}$ est inversible et vérifie, d'après la formule de changement de base appliquée à l'endomorphisme f,
$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(a+1) \end{pmatrix}.$$

Exercice 18

Question 1

Tout d'abord, la matrice $A = CL$ est carrée d'ordre n et la matrice $a = LC$ est carrée d'ordre 1 ; cette dernière est identifiée à son unique coefficient.

L'associativité du produit matriciel donne :
$$A^2 = (CL)^2 = (CL)(CL) = C(LC)L = CaL = aCL = aA.$$
Ainsi le polynôme $P = X^2 - aX = X(X-a)$ est annulateur de A. Comme les valeurs propres de A sont racines du polynôme annulateur P, la matrice A admet donc 0 et a comme seules valeurs propres éventuelles.

Exercice 18

Question 2

La matrice A a pour coefficient générique $a_{i,j} = c_i \ell_j$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$. La j-ième colonne de A est donc donnée par
$$\begin{pmatrix} c_1 \ell_j \\ \vdots \\ c_n \ell_j \end{pmatrix} = \ell_j C.$$
Ainsi toutes les colonnes de A sont proportionnelles à C et $\operatorname{rg} A \leqslant 1$. Mais par ailleurs $C \neq 0$ et $L \neq 0$ si bien que $\operatorname{rg} A = 1$.

Exercice 18

Question 3

Le théorème du rang appliqué à l'endomorphisme canoniquement associé à A donne
$$\dim E_0(A) = n - \operatorname{rg} A = n - 1.$$
Comme $n \geqslant 2$, $E_0(A)$ est donc non nul et 0 est valeur propre de A.

D'autre part, le calcul montre que $AC = (CL)C = C(LC) = aC$ donc $C \neq 0$ est vecteur propre de A pour la valeur propre a.

D'après la question **1.**, les valeurs propres de A sont donc 0 et a.

Remarque. Les vecteurs propres de A associés à une valeur propre non nulle sont à rechercher dans l'image de (l'endomorphisme canoniquement associé à) A, c'est-à-dire sur la droite dirigée par C...

Exercice 18

Question 4

Tout d'abord, étant donné que $A^2 = aA$ avec $A \neq 0$ d'après **1.**, la condition $A^2 \neq 0$ équivaut à $a \neq 0$. On distingue alors deux cas :

- Si $a = 0$, la matrice A admet une unique valeur propre 0 mais alors
$$\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} A} \dim E_\lambda(A) = \dim E_0(A) = n - 1 < n$$
et A n'est pas diagonalisable.
- Si $a \neq 0$, alors A admet deux valeurs propres 0 et a si bien que
$$\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} A} \dim E_\lambda(A) = \dim E_0(A) + \dim E_a(A) \geqslant (n-1) + 1 = n$$
et A est diagonalisable.

En conclusion, la matrice A est diagonalisable si, et seulement si, $a \neq 0$ i.e. $A^2 \neq 0$.

Exercice 20

Question 1

Soit $\lambda \neq 0$ une valeur propre de u. Pour $x \in E_\lambda(u)$, on a $u(x) = \lambda x$ et donc

$$x = \frac{1}{\lambda}u(x) = u\left(\frac{x}{\lambda}\right) \in \operatorname{Im} u,$$

d'où l'inclusion $E_\lambda(u) \subset \operatorname{Im} u$.

Exercice 20

Question 2

Si u est diagonalisable, alors ses sous-espaces propres sont supplémentaires. Puisque

$$E_0(u) = \operatorname{Ker} u \quad \text{et} \quad \bigoplus_{\substack{\lambda \in \operatorname{Sp} u \\ \lambda \neq 0}} E_\lambda(u) \subset \operatorname{Im} u$$

d'après la question **1.**, les sous-espaces $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ engendrent donc E. Avec le théorème du rang qui donne

$$\dim(\operatorname{Ker} u) + \dim(\operatorname{Im} u) = \dim E,$$

il en ressort que les sous-espaces $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 22

Par hypothèse, le polynôme $P = X^3 - 3X^2 + 2X = X(X-1)(X-2)$ est annulateur de u. Les valeurs propres de u sont donc racines de P, c'est-à-dire parmi 0, 1 et 2.

Dans ces conditions, l'endomorphisme u est diagonalisable si, et seulement si, les sous-espaces $\operatorname{Ker} u$, $\operatorname{Ker}(u - \operatorname{id}_E)$ et $\operatorname{Ker}(u - 2\operatorname{id}_E)$ sont supplémentaires dans E. Il s'agit donc, pour $x \in E$ donné, d'établir l'existence et l'unicité d'un triplet $(x_0, x_1, x_2) \in \operatorname{Ker} u \times \operatorname{Ker}(u - \operatorname{id}_E) \times \operatorname{Ker}(u - 2\operatorname{id}_E)$ tel que $x = x_0 + x_1 + x_2$.

On raisonne pour cela par analyse-synthèse.

- **Analyse.** Si

$$x = x_0 + x_1 + x_2 \tag{1}$$

pour $x_0 \in \operatorname{Ker} u$, $x_1 \in \operatorname{Ker}(u - \operatorname{id}_E)$ et $x_2 \in \operatorname{Ker}(u - 2\operatorname{id}_E)$ alors, en appliquant u à (1), il vient :

$$u(x) = u(x_0) + u(x_1) + u(x_2) = x_1 + 2x_2. \tag{2}$$

De même, en réappliquant u à (2), on obtient :

$$u^2(x) = x_1 + 4x_2. \tag{3}$$

Les équations (1), (2) et (3) constituent un système d'inconnue (x_0, x_1, x_2) dont obtient facilement *l'unique* solution :

$$x_0 = x - \frac{3}{2}u(x) + \frac{1}{2}u^2(x), \quad x_1 = 2u(x) - u^2(x), \quad x_2 = \frac{u^2(x) - u(x)}{2}.$$

Ceci établit l'unicité de la décomposition.

- **Synthèse.** On pose :

$$x_0 = x - \frac{3}{2}u(x) + \frac{1}{2}u^2(x), \quad x_1 = 2u(x) - u^2(x), \quad x_2 = \frac{u^2(x) - u(x)}{2}$$

et l'on vérifie que :

  - $x_0 + x_1 + x_2 = x$
  - $u(x_0) = \frac{1}{2}(u^3 - 3u^2 + 2u)(x) = 0$ donc $x_0 \in \operatorname{Ker} u$
  - $u(x_1) - x_1 = -(u^3 - 3u^2 + 2u)(x) = 0$ donc $x_1 \in \operatorname{Ker}(u - \operatorname{id}_E)$
  - $u(x_2) - 2x_2 = \frac{1}{2}(u^3 - 3u^2 + 2u)(x) = 0$ donc $x_2 \in \operatorname{Ker}(u - 2\operatorname{id}_E)$

Ceci établit l'existence de la décomposition.

Exercice 25

Question 1.a

Tout d'abord, étant donné que u admet $n = \dim E$ valeurs propres deux-à-deux distinctes, les sous-espaces propres sont des droites : $E_{\lambda_i}(u) = \mathbb{K}e_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

On a $u \circ v = v^2 \circ v = v^3 = v \circ v^2 = v \circ u$, si bien que u et v commutent.

Pouur $i \in [\![1, n]\!]$, on a donc :

$$u\big(v(e_i)\big) = v\big(u(e_i)\big) = v(\lambda_i e_i) = \lambda_i v(e_i).$$

Ainsi $v(e_i)$ appartient au sous-espace propre $E_{\lambda_i}(u)$. Il est donc colinéaire au vecteur e_i d'après l'observation préliminaire : il existe $\mu_i \in \mathbb{K}$ tel que $v(e_i) = \mu_i e_i$ et le vecteur e_i est donc propre pour v également.

Puisqu'il existe ainsi une base de E formée de vecteurs propres de v, l'endomorphisme v est diagonalisable.

Exercice 25

Question 1.b

Non, comme le montre le contre-exemple donné les endomorphismes u et v de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associés aux matrices

$$U = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a $v^2 = u$, l'endomomorphisme $u = -\operatorname{id}$ est diagonalisable mais pas l'endomorphisme v, qui n'admet aucune valeur propre réelle.

Exercice 25

Question 2

On commence par diagonaliser (si possible) la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Recherche des valeurs propres de A

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{rg}(A-\lambda I_3) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 11-\lambda & -5 & 5 \\ -5 & 3-\lambda & -3 \\ 5 & -3 & 3-\lambda \end{pmatrix} \underset{\substack{L_1 \leftarrow 5L_1+(11-\lambda)L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3+L_2}}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 8-14\lambda+\lambda^2 & -8+3\lambda \\ -5 & 3-\lambda & -3 \\ 0 & -\lambda & -\lambda \end{pmatrix} \underset{C_2 \leftarrow C_2-C_3}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 16-17\lambda+\lambda^2 & -8+3\lambda \\ -5 & 6-\lambda & -3 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Ainsi $\operatorname{rg}(A-\lambda I_3) < 3$ si, et seulement si, $\lambda \in \{0, 1, 16\}$: la matrice A admet donc pour valeurs propres 0, 1 et 16.

La matrice A, carrée d'ordre 3 admettant 3 valeurs propres, est automatiquement diagonalisable.
Ses sous-espaces propres $E_0(A)$, $E_1(A)$ et $E_{16}(A)$, respectivement dirigés par les vecteurs

$$V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sont donc supplémentaires dans $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

$$\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = E_0(A) \oplus E_1(A) \oplus E_{16}(A). \qquad (*)$$

La matrice

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

est alors inversible comme matrice de passage de la base canonique de $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ à la base (V_1, V_2, V_3), adaptée à la décomposition $(*)$ et vérifie, d'après la formule de changement de base appliquée à l'endomorphisme canoniquement associé à A :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} = D.$$

Soient X une matrice de $\mathbf{M}_3(R)$ telle que $X^2 = A$ ainsi que u et v les endomorphismes canoniquement associés à A et X.
Puisque A admet 3 valeurs propres distinctes, le résultat de la question **1.a.** s'applique et assure que les vecteurs V_1, V_2 et V_3 sont propres pour v. En d'autres termes, la matrice $P^{-1}XP$ est diagonale.

On peut alors raisonner par équivalence, pour $X \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} X^2 = A &\iff X^2 = PDP^{-1} \\ &\iff P^{-1}X^2P = D \\ &\iff (P^{-1}XP)^2 = D \\ &\iff \exists \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{-1, 1\}, P^{-1}XP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & 4\varepsilon_2 \end{pmatrix} \\ &\iff \exists \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{-1, 1\}, X = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & 4\varepsilon_2 \end{pmatrix}P^{-1}. \end{aligned}$$

Exercice 26

Question 1.a

L'hyperplan H est stable si, et seulement si,

$$\forall x \in E, \quad \varphi(x) = 0 \Rightarrow \varphi\big(f(x)\big) = 0$$

c'est-à-dire $\operatorname{Ker}\varphi \subset \operatorname{Ker}\varphi \circ f$. Il s'agit de justifier que cette inclusion équivaut à l'existence de $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi \circ f = \lambda\varphi$.

- Un sens de l'équivalence est évident : si $\varphi \circ f = \lambda\varphi$, alors on a bien sûr $\varphi(x) = 0 \Rightarrow \varphi\big(f(x)\big) = 0$.
- Réciproquement, si $\operatorname{Ker}\varphi \subset \operatorname{Ker}\varphi \circ f$, de deux choses l'une :
  - Soit $\varphi \circ f = 0$, auquel cas l'inclusion précédente est stricte et l'on a bien $\varphi \circ f = \lambda\varphi$ avec $\lambda = 0$.
  - Soit $\varphi \circ f \neq 0$, auquel cas on se trouve en présence d'une forme linéaire non nulle, dont le noyau est un hyperplan, comme celui de φ. On a alors égalité des dimensions dans l'inclusion $\operatorname{Ker}\varphi \subset \operatorname{Ker}\varphi \circ f$, qui est donc une égalité. Mézalors φ et $\varphi \circ f$ sont deux équations d'un même hyperplan, et comme un hyperplan admet une unique équation à multiplication près par un scalaire non nul, il existe $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tel que $\varphi \circ f = \lambda\varphi$.

Exercice 26

Question 1.b

La forme linéaire $\varphi \circ f$ est représentée par la matrice ligne LA.
D'après **a.**, l'hyperplan $H = \operatorname{Ker}\varphi$ est donc stable par f si, et seulement si, il existe λ tel que $LA = \lambda L$, c'est-à-dire ${}^tA{}^tL = \lambda{}^tL$. Cela revient à dire que la matrice colonne ${}^tL$ (non nulle) est propre pour la matrice ${}^tA$.
Ainsi, les hyperplans stables par f sont les hyperplans d'équation $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$, où ${}^t\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ est une colonne propre de ${}^tA$.

Exercice 26

Question 2

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A. On classifie les sous-espaces stables par f selon leur dimensions :

- Les sous-espaces $\{0\}$ et $\mathbb{R}^3$ sont bien sûr stables...
- Une droite D de $\mathbb{R}^3$ est stable par f si, et seulement si, elle est dirigée par un vecteur propre de f. On montre que la matrice A admet pour valeurs propres -1, 1 et 2 et pour sous-espaces propres associés les droites D_1, D_2 et D_3 dirigées par les vecteurs ${}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ${}^t\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et ${}^t\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
L'endomorphisme f admet donc trois droites stables : D_1, D_2 et D_3.
- La matrice ${}^tA$ admet les mêmes valeurs propres que A : -1, 1 et 2, associées aux droites propres dirigées par ${}^t\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, ${}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et ${}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
D'après la question **1.b.**, l'endomorphisme f admet donc trois plans stables, d'équations respectives $y + z = 0$, $x + y - z = 0$ et $x - z = 0$.

Exercice 27

Question 1

Recherche des valeurs propres de A

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{rg}(A-\lambda I_3) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1-\lambda & -12 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 4 & 8 & 3-\lambda \end{pmatrix} \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1-(1-\lambda)L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3-4L_2}}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & -13+2\lambda-\lambda^2 & 1+\lambda \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 4+4\lambda & -1-\lambda \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1+L_3}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & -9+6\lambda-\lambda^2 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 4+4\lambda & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

Ainsi $\operatorname{rg}(A-\lambda I_3) < 3$ si, et seulement si, $\lambda \in \{-1, 3\}$. La matrice A admet donc pour valeurs propres -1 et 3.

L'étude des sous-espaces propres de A montre que $E_{-1}(A)$ est la droite dirigée par le vecteur $V_1 = {}^t(1 \quad 0 \quad -1)$ et $E_3(A)$ la droite dirigée par le vecteur $V_2 = {}^t(-2 \quad 1 \quad 4)$.

L'endomorphisme u présente les mêmes éléments propres que sa matrice représentative A. On a ainsi

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, u} \dim E_\lambda(u) = \dim E_{-1}(u) + \dim E_3(u) = 2 < 3$$

et l'endomorphisme u n'est donc pas diagonalisable.

Exercice 27

Question 2.a

Puisque

$$(A - 3I_3)^2 = 16 \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix},$$

le sous-espace $P = \mathrm{Ker}(u - 3\,\mathrm{id})^2$ est le plan d'équation $z = 4y$. Il est en somme directe avec la droite $D = \mathrm{Ker}(u + \mathrm{id})$ puisque le vecteur directeur V_1 de D ne vérifie pas l'équation de P. Puisque $\dim P + \dim D = 3$, on en déduit que les sous-espaces P et D sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 27

Question 2.b

Il s'agit de trouver une base $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que

$$\begin{cases} u(e_1) = -e_1 \\ u(e_2) = 3e_2 \\ u(e_3) = e_2 + 3e_3 \end{cases} \iff \begin{cases} (u + \mathrm{id})(e_1) = 0 \\ (u - 3\,\mathrm{id})^2(e_3) = 0 \\ (u - 3\,\mathrm{id})(e_3) = e_2 \end{cases}. \qquad (*)$$

On choisit donc le vecteur e_1 dans le sous-espace $\mathrm{Ker}(u + \mathrm{id})$, par exemple $e_1 = (1, 0, -1)$. Puis on choisit le vecteur e_3 dans $\mathrm{Ker}(u - 3\,\mathrm{id})^2 \setminus \mathrm{Ker}(u - 3\,\mathrm{id})$ (afin qu'il ne soit pas colinéaire à e_2 qui sera dans $\mathrm{Ker}(u - 3\,\mathrm{id})$), par exemple $e_3 = (1, 0, 0)$. On pose enfin $e_2 = (u - 3\,\mathrm{id})(e_3) = (-2, 1, 4)$.

On vérifie alors :

- Par construction, la famille (e_2, e_3) est libre car $e_2 \neq 0$ et $e_3 \notin \mathrm{Ker}(u - 3\,\mathrm{id}) = \mathrm{Vect}(e_2)$. Puis $e_1 \notin \mathrm{Vect}(e_2, e_3) = \mathrm{Ker}(u - 3\,\mathrm{id})^2$ donc la famille (e_1, e_2, e_3) est libre. Formée de $3 = \dim \mathbb{R}^3$ vecteurs, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.
- Dans cette base, u est représenté par la matrice B puisque le système $(*)$ est satisfait.

Exercice 27

Question 3

On écrit $B = D + N$ où

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec N nilpotente : $N^2 = 0$. Puisque D et N commutent le vérifier !), la formule du binôme s'applique et donne, pour $n \geqslant 1$:

$$B^n = (D + N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k D^{n-k} = D^n + nND^{n-1}$$

$$= \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

Remarque. La formule ci-dessus est encore valable pour $n = 0$.

D'après la formule de changement de base appliquée à l'endomorphisme u, on a $B = P^{-1}AP$ où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

est la matrice de passage de la base canonique à la base $\underline{e}$. On a alors pour $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = (PBP^{-1})^n = PB^nP^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3^n - 2n3^{n-1} & 4(-1)^n - 4 \cdot 3^n + 4n3^{n-1} & -(-1)^n + 3^n - 2n3^{n-1} \\ n3^{n-1} & 3^n - 2n3^{n-1} & n3^{n-1} \\ 4n3^{n-1} & -4(-1)^n + 4 \cdot 3^n - 8n3^{n-1} & (-1)^n + 4n3^{n-1} \end{pmatrix}$$

Exercice 28

Question 1.a

La matrice

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$$

est de rang 1 car ses colonnes engendrent la droite dirigée par le vecteur ${}^t(1 \quad \cdots \quad 1)$. D'après le théorème du rang appliqué à l'endomorphisme canoniquement associé à $\mathbb{1}$,

$$\dim E_0(\mathbb{1}) = n - \mathrm{rg}\,\mathbb{1} = n - 1 \geqslant 1$$

et 0 est donc valeur propre de $\mathbb{1}$.

Les vecteurs

$$V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad V_n = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sont $n - 1$ vecteurs linéairement indépendants de $E_0(\mathbb{1})$, qui en forment donc une base.

Remarque. On peut montrer que la famille est génératrice du sous-espace $E_0(\mathbb{1})$ en posant ses équations :

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0 \iff X = x_2V_2 + \cdots + x_nV_n.$$

Puisque $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,\mathbb{1}} \dim E_\lambda(\mathbb{1}) \leqslant n$, la matrice $\mathbb{1}$ admet au plus une valeur propre non nulle. Plus précisément, dans une base de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ obtenue par complétion d'une base de $E_0(\mathbb{1})$, l'endomorphisme canoniquement associé à $\mathbb{1}$ est représenté par la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & c_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & c_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & c_n \end{pmatrix}.$$

Les matrices $\mathbb{1}$ et C, semblables, ont mêmes trace :

$$c_n = \mathrm{tr}\,C = \mathrm{tr}\,\mathbb{1} = n$$

et mêmes valeurs propres. La matrice $\mathbb{1}$ admet donc une dernière valeur propre n.

On vérifie que le vecteur $V_1 = {}^t\begin{pmatrix}1 & \cdots & 1\end{pmatrix}$ (judicieusement choisi sur l'image de l'endomorphisme canoniquement associé à $\mathbb{1}$) est propre pour n : $\mathbb{1}V_1 = nV_1$. On a donc l'inclusion $\operatorname{Vect} V_1 \subset E_n(\mathbb{1})$ et comme on a déjà vu que

$$\dim E_n(\mathbb{1}) \leqslant n - \dim E_0(\mathbb{1}) = 1$$

(car les sous-espaces propres $E_0(\mathbb{1})$ et $E_n(\mathbb{1})$ sont en somme directe), l'inclusion précédente est une égalité : $E_n(\mathbb{1}) = \operatorname{Vect} V_1$.

Exercice 28

Question 1.b

Pour $a, b \in \mathbb{R}$,

$$M(a,b) = b\mathbb{1} + (a-b)I_n.$$

- Pour $b = 0$, la matrice $M(a,0) = aI_n$ admet donc a pour seule valeur propre.
- Si $b \neq 0$, alors
$$M(a,b) - \lambda I_n = b\Big(\mathbb{1} - \frac{\lambda - a + b}{b} I_n\Big)$$
est non inversible si, et seulement si, $\frac{\lambda-a+b}{b}$ est valeur propre de $\mathbb{1}$. D'après la question **a.**, la matrice $M(a,b)$ admet donc deux valeurs propres : $a-b$ et $a-b+nb = a+(n-1)b$.

Remarque. On peut retrouver ce résultat en diagonalisant la matrice $\mathbb{1}$. En effet, comme

$$\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} \mathbb{1}} \dim E_\lambda(\mathbb{1}) = \dim E_0(\mathbb{1}) + \dim E_n(\mathbb{1}) = (n-1) + 1 = n,$$

la matrice $\mathbb{1}$ est diagonalisable. La famille $\underline{V} = (V_1, \dots, V_n)$ est donc une base de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ adaptée à la décomposition

$$\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = E_n(\mathbb{1}) \oplus \mathbb{E}_0(\mathbb{1}).$$

En notant $P \in \mathbf{Gl}_n(\mathbb{R})$ la matrice de passage de la base canonique à la base $\underline{V}$, on a donc

$$P^{-1}\mathbb{1}P = \begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} = D$$

d'après la formule de changement de base appliquée à l'endomorphisme canoniquement associé à $\mathbb{1}$.

Dans ces conditions,

$$\begin{aligned} P^{-1}M(a,b)P &= P^{-1}\big(b\mathbb{1} + (a-b)I_n\big)P \\ &= bP^{-1}\mathbb{1}P + (a-b)I_n \\ &= bD + (a-b)I_n \\ &= \begin{pmatrix} a+(n-1)b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a-b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a-b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matrice $M(a,b)$, semblable à la matrice diagonale ci-dessus, admet donc les mêmes valeurs propres : $a+(n-1)b$ et $a-b$.

Exercice 28

Question 2

C'est immédiat après la remarque précédente !

On peut également le justifier plus rapidement : la méthode de la question **1.b.** donne non seulement les valeurs propres de $M(a,b)$ mais montre aussi que pour $b \neq 0$,

$$E_{a-b}\big(M(a,b)\big) = E_0(\mathbb{1}) \quad \text{et} \quad E_{a+(n-1)b}\big(M(a,b)\big) = E_n(\mathbb{1}).$$

D'après la question **1.a.**, on a donc

$$\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} M(a,b)} \dim E_\lambda\big(M(a,b)\big) = \dim E_{a-b}\big(M(a,b)\big) + \dim E_{a+(n-1)b}\big(M(a,b)\big) = n$$

et la matrice $M(a,b)$ est donc diagonalisable.

Le cas $b = 0$ est immédiat puisque la matrice $M(a,0)$ est alors diagonale.