Intégrales généralisées
Feuille d'exercices

1 ✎ Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan t \ln t}{\sqrt{t}-\sin t}\,\mathrm{d}t$;
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathbf{e}^{-(\ln t)^2}\,\mathrm{d}t$;
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln t)\mathbf{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$;
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$;
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t$;
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\sqrt[3]{t+1}-\sqrt[3]{t})^{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$;
7. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t-\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \quad (\alpha\in\mathbb{R})$;
8. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt[3]{t^2(1-t^2)}}$;
9. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t^2-t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$;
10. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \tan^\alpha t\,\mathrm{d}t \quad (\alpha\in\mathbb{R})$;
11. $\displaystyle\int_0^1 (-\ln t)^\alpha\,\mathrm{d}t \quad (\alpha\in\mathbb{R})$;
12. $\displaystyle\int_0^1 t^\alpha \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t \quad (\alpha\in\mathbb{R})$.

2 ✎ Étudier la convergence et, le cas échéant, calculer les intégrales généralisées suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)}$;
2. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \tan t\,\mathrm{d}t$;
3. $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin t}{\sqrt{\cos t}}\,\mathrm{d}t$;
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)(t+1)}$;
5. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^\alpha} \ (\alpha\in\mathbb{R})$;
6. $\displaystyle\int_0^1 t^\beta \ln t\,\mathrm{d}t \ (\beta\in\mathbb{R})$;
7. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1-t\arctan\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$;
8. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+\mathbf{e}^t}}$;
9. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+t+1}$;
10. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t-1)(2-t)}}$.

3 ★

1. Pour $\alpha>0$, on souhaite établir la convergence de l'intégrale généralisée
$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t.$$
   a. Traiter le cas $\alpha>1$.
   b. En utilisant une intégration par parties, conclure dans le cas $0<\alpha\leqslant 1$.
2. En déduire, pour $\alpha>0$, la nature de l'intégrale
$$\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{\sin t}{t^\alpha}\right)\mathrm{d}t.$$

4 Soit $f:\mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose qu'il existe un réel $\alpha>0$ tel que pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $f'(x)\geqslant\alpha$. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)/t^2\,\mathrm{d}t$ diverge.

5

1. Justifier la convergence des intégrales
$$\mathrm{I}=\int_0^{\pi/2}\ln(\sin t)\,\mathrm{d}t \qquad\text{et}\qquad \mathrm{J}=\int_0^{\pi/2}\ln(\cos t)\,\mathrm{d}t$$
et montrer que $\mathrm{I}=\mathrm{J}$.
2. En considérant $\mathrm{I}+\mathrm{J}$, calculer I et J.

6

1. Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\mathrm{I}=\int_0^{+\infty}\frac{\sin^3 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.
2. Montrer que :
$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^3 t}{t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{3}{4}\lim_{x\to 0}\int_x^{3x}\frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$
3. Montrer que la fonction
$$g:t\longmapsto\frac{\sin t - t}{t^2}$$
peut être prolongée par continuité à l'origine.
4. En déduire la valeur de I.

7 ★ Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose
$$\mathrm{I}_n=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}.$$

1. Justifier la convergence des intégrales généralisées I_n, $n\geqslant 1$.
2. Pour $n\geqslant 1$, établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.
3. En déduire une expression de I_n à l'aide de factorielles.

8 Soit $f:[1,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t=1$.
Montrer qu'il existe $x_0\in\,]1,+\infty[$ tel que $x_0^2 f(x_0)=1$.

9 Montrer que l'application qui, à un polynôme $\mathrm{P}\in\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, associe le $(n+1)$-uplet de réels $(x_0,\ldots,x_n)$ défini par
$$\forall k\in[\![0,n]\!],\qquad x_k=\int_0^{+\infty}\mathbf{e}^{-t}t^k\mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t$$
est un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ sur $\mathbb{R}^{n+1}$.

10

1. Justifier, pour tout $x>0$, la convergence de l'intégrale
$$\mathrm{J}(x)=\int_x^{+\infty}\frac{\mathbf{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\mathrm{J}(x) \sim \frac{\mathbf{e}^{-x}}{x}, \quad x \to +\infty.$$

11 ♣ **1.** On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{2+t^3}\right)^n \mathrm{d}t.$$

Étudier la convergence de la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
Indication. On pourra partager l'intervalle d'intégration en deux.

2. Même question avec :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{J}_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^5+1)^n}.$$

12 ★ **1.** Justifier brièvement que :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \frac{2}{\pi}x \leqslant \sin x \leqslant x.$$

2. On considère la fonction $f : x \in [0,+\infty[\longmapsto x\mathbf{e}^{-x^3|\sin x|}$ et l'on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, justifier la chaîne d'inégalités ci-dessous :

$$u_n \leqslant (n+1)\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathbf{e}^{-n^3\pi^3|\sin t|}\,\mathrm{d}t \leqslant 2(n+1)\pi \int_0^{\pi/2} \mathbf{e}^{-n^3\pi^3 \sin t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{n+1}{n^3\pi}.$$

b. En déduire que la série $\sum u_n$ converge puis que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

3. Soit f une fonction continue sur $[0,+\infty[$. Est-il nécessaire et/ou suffisant que $f(x)$ tende vers 0 lorsque $x \to +\infty$ pour que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge ? Justifier.

13 ♣ Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue.

1. On suppose que f admet une limite $\ell \in \mathbb{C}$ en $+\infty$.
Montrer que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \ell.$$

2. On suppose que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
Déterminer

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t.$$

14 ✎ Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln^\beta n}$ $(\beta \in \mathbb{R})$; **2.** $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{a^{\sqrt{\ln n}}}{n}$ $(a \in]0,1[)$.

15 ✎ Trouver un équivalent des quantités suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$, $n \to \infty$; **2.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$, $x \to +\infty$.

16 **1.** Soient $a > 0$ et $f : [a,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f'(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument.

a. Justifier que :

$$\forall n \geqslant a+1, \qquad w_n = \int_{n-1}^n f(t)\,\mathrm{d}t - f(n) = \int_{n-1}^n (n-1-t)f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

b. Montrer que la série $\sum w_n$ est absolument convergente.

2. Étudier la nature de la série

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(\ln n)}{n}.$$

On admettra que la suite $\big(\cos(\ln n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est divergente.

17 ★ **1.** Montrer que la fonction

$$f : x \in]0,\pi] \longmapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sin(x/2)}$$

se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\mathrm{I}_n = \int_0^\pi \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}\,\mathrm{d}t.$$

Justifier la convergence de l'intégrale I_n. Calculer $\mathrm{I}_{n+1} - \mathrm{I}_n$ puis I_n.

3. Montrer que, pour une fonction g de classe $\mathscr{C}^1$ sur un segment $[a,b]$ ($a < b$ réels), on a :

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b g(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

4. Montrer que l'intégrale de Dirichlet

$$\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

est convergente et déduire des questions précédentes la valeur de I.

18 ★ On pose

$$\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \mathbf{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{W}_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \,\mathrm{d}x \qquad \mathrm{I}_n = \int_0^1 (1-x^2)^n \,\mathrm{d}x \qquad \mathrm{J}_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}.$$

1. **a.** Étudier la convergence des intégrales généralisées précédentes.
b. À l'aide du changement de variable $x = \cos t$, montrer que $\mathrm{I}_n = \mathrm{W}_{2n+1}$ pour $n \geqslant 0$.
c. À l'aide du changement de variable $x = \tan t$, montrer que $\mathrm{J}_n = \mathrm{W}_{2n-2}$ pour $n \geqslant 1$.

2. **a.** Montrer que

$$\forall x \in [0,1], \qquad 1 - x^2 \leqslant \mathbf{e}^{-x^2},$$

puis que

$$\forall x \in [0,+\infty[, \qquad \mathbf{e}^{-x^2} \leqslant \frac{1}{1+x^2}.$$

b. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sqrt{n}\mathrm{I}_n \leqslant \mathrm{I} \leqslant \sqrt{n}\mathrm{J}_n.$$

3. **a.** Montrer que la suite $(\mathrm{W}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad (n+2)\mathrm{W}_{n+2} = (n+1)\mathrm{W}_n.$$

En déduire que $\mathrm{W}_n \sim \mathrm{W}_{n+1}$ lorsque $n \to \infty$.
b. En calculant $(n+1)\mathrm{W}_n\mathrm{W}_{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que :

$$\mathrm{W}_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}, \qquad n \to \infty.$$

4. Déterminer la valeur de I.

19 ★ On considère la fonction

$$f : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \int_0^1 \frac{\sin(xt)}{t} \,\mathrm{d}t.$$

1. Justifier que f est bien définie.

2. **a.** Pour $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ donné, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \left| f(x) - f(x_0) - (x-x_0)\int_0^1 \cos(x_0 t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{(x-x_0)^2}{4}.$$

b. En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.

20 ♣ **Étude de la fonction Γ**

1. Montrer que :

$$\forall x > 0, \quad \Gamma(x) \geqslant \frac{1}{\mathbf{e}} \int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t.$$

En déduire que $\lim\limits_{x\to 0} \Gamma(x) = +\infty$.

2. Montrer que :

$$\forall x > 1, \quad \Gamma(x) \geqslant 2^{x-1} \int_2^{+\infty} \mathbf{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \Gamma(x)$.

On définit, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $f_t : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto t^{x-1}\mathbf{e}^{-t}$.

3. Montrer que f_t est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer f_t' et f_t''.

4. Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $|h| \leqslant \min(x/2, 1)$.
a. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\left| \frac{f_t(x+h) - f_t(x)}{h} - f_t'(x) \right| \leqslant \frac{|h|}{2}\mathrm{M}_2(t,x)$$

où

$$\mathrm{M}_2(t,x) = \begin{cases} (\ln t)^2 \mathbf{e}^{-t} t^{x/2-1} & \text{si } t < 1 \\ (\ln t)^2 \mathbf{e}^{-t} t^{x} & \text{si } t \geqslant 1 \end{cases}.$$

b. Justifier la convergence des intégrales

$$\int_0^1 (\ln t)^2 \mathbf{e}^{-t} t^{x/2-1}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_1^{+\infty} (\ln t)^2 \mathbf{e}^{-t} t^{x}\,\mathrm{d}t.$$

c. En déduire que Γ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} f_t'(x)\,\mathrm{d}t.$$

5. Montrer que la fonction Γ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

21 Déterminer :

1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \prod_{k=1}^n (n^2+k^2)^{1/n}$; **2.** $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \sin\frac{k}{n} \sin\frac{k}{n^2}$.

22 **1.** Montrer que la fonction

$$x \longmapsto \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$$

est prolongeable en une fonction f continue sur $[0, \pi/2]$.

2. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sin\frac{k\pi}{2n}}.$$

Déterminer la limite ainsi qu'un équivalent simple de u_n lorsque $n \to \infty$.

23 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : x \in [0,1[\longmapsto nx^{n-1}$.
Comparer

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} f_n(t)\right)\mathrm{d}t.$$

24 Pour tout $t \in]0, +\infty[$, on considère la fonction

$$f_t : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{x^2}{x^2 + t^2}.$$

On pose

$$\mathrm{F} : x \in \mathbb{R} \longmapsto \int_0^{+\infty} f_t(x)\,\mathrm{d}t.$$

A-t-on :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{F}'(x) = \int_0^{+\infty} f_t'(x)\,\mathrm{d}t\,?$$

Indications

2 Étudier l'existence de limites finies pour une primitive aux bornes de généralisation.

6. Intégration par parties.

7. Intégration par parties.

8. Changement de variable « $u = \sqrt{1+\mathbf{e}^t}$ ».

9. Mettre le dénominateur sous forme canonique puis faire un changement de variable.

10. Mettre l'expression sous la racine sous forme canonique puis faire un changement de variable.

3 **2.** Montrer que

$$\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{\sin t}{t^\alpha}\right) \mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^{2\alpha}} \mathrm{d}t$$

ont même nature. Pour étudier la seconde intégrale, on pourra linéariser $\sin^2 t$.

5 **1.** Utiliser un changement de variable.

6 **2.** Linéariser $\sin^3 t$.

7 **2.** Procéder à une intégration par parties dans I_n, en primitivant $t \longmapsto 1$ et en dérivant $t \longmapsto 1/(1+t^2)^n$.

3. Conjecturer une expression et l'établir par récurrence ou utiliser un produit télescopique :

$$\forall n \geqslant 1, \mathrm{I}_n = \mathrm{I}_1 \prod_{k=1}^{n-1} \frac{\mathrm{I}_{k+1}}{\mathrm{I}_k}.$$

8 Étudier l'intégrale sur $]1, +\infty[$ de $x \longmapsto f(x) - 1/x^2$.

11 **2.** Revenir aux ε.

12 **2.** **a.** On rappelle que si f est T-périodique, alors $\int_a^{a+\mathrm{T}} f$ ne dépend pas de a.

13 **1.** Commencer par traiter le cas $\ell = 0$. Pour $\varepsilon > 0$ donné et $a > 0$ à ajuster, montrer qu'on peut majorer chacun des termes du second membre de

$$\forall x \geqslant a, \qquad \left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{x}\left|\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t\right| + \frac{1}{x}\int_a^x |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

par $\varepsilon/2$ pour x assez grand. Traiter ensuite le cas général en étudiant la fonction $x \longmapsto f(x) - \ell$.

2. Utiliser une intégration par parties.

14 Utiliser une comparaison série-intégrale.

15 Utiliser des comparaisons série-intégrale.

16 **2.** On pourra justifier que la série étudiée est de même nature que la série

$$\sum \int_{n-1}^n \frac{\sin(\ln t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

17 **4.** Étudier

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi f(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2} t\right) \mathrm{d}t.$$

21 **1.** Étudier le logarithme de l'expression proposée et reconnaître une somme de Riemann.

2. Relier l'expression proposée à une somme de Riemann grâce à une formule de Taylor.

22 **2.** En faisant apparaître les sommes de Riemann de la fonction f, comparer (u_n) à la suite des sommes partielles de la série harmonique, dont on déterminera un équivalent par comparaison série-intégrale.