Algèbre linéaire

Feuille d'exercices

1 ✎ Dans l'espace vectoriel $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, montrer que les familles suivantes sont libres :

1. $f_a : x \mapsto \mathbf{e}^{ax}, a \in \mathbb{R}$; **2.** $g_a : x \mapsto |x-a|, a \in \mathbb{R}$; **3.** $h_n : x \mapsto \sin nx, n \in \mathbb{N}^*$

2 ✎ Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$ peuvent être définis de trois façons suivantes :

- par des équations cartésiennes :
$$E = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z = 0, y - 2t = 0\} ;$$
- par un paramétrage :
$$F = \{(2a - 3b + c, a + 2b - c, -b + c, a)\}_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} ;$$
- par la donnée d'une base (ou d'une famille génératrice) :
$$G = \mathrm{Vect}\big((1,2,-1,0),(0,1,3,-1)\big).$$

Écrire chacun de ces sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ sous les trois formes possibles.

3 ✎ Montrer que l'ensemble E des polynômes $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + a_4X^4 \in \mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à 4 vérifiant les équations
$$\begin{cases} a_0 - 2a_1 + 3a_3 - a_4 = 0 \\ 2a_0 - 4a_2 + a_3 = 0 \\ a_0 + 2a_1 - 4a_2 - 2a_3 + a_4 = 0 \end{cases}$$
est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$ et en déterminer une base.

4 ★ Montrer que toute famille de polynômes non nuls et de degrés deux-à-deux distincts est libre.

5 ✎ Montrer que toute matrice $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ admet un polynôme annulateur non nul.

6 ✎ Soit $E = \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit l'application $\varphi : E \longrightarrow E$ en posant, pour tout $f \in E$,
$$\varphi(f) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t.$$
Montrer que φ est un endomorphisme de E. Est-il injectif ? surjectif ?

7 Pour $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{K}$, démontrer la formule de Taylor pour les polynômes :
$$\forall P \in \mathbb{K}_n[X], \qquad P(X+a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} X^k$$
lorsque P est un monôme puis dans le cas général.

8 ✎ Soient A, B, B′ et C quatre espaces vectoriels et f, f', g, g' et h des applications linéaires telles que ci-dessous :
$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "g"] \arrow[dd, "h"] & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & & C \\ & B' \arrow[ur, "g'"'] & \end{tikzcd}$$
On suppose en outre que :

➢ $h \circ f = f'$ et $g' \circ h = g$;
➢ f et f' sont injectives, g et g' sont surjectives ;
➢ $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}\, g$ et $\mathrm{Im}\, f' = \mathrm{Ker}\, g'$.

Le but de l'exercice est de montrer qu'alors h est un isomorphisme.

1. Montrer que pour tout $a \in A$, $g \circ f(a) = 0$ et $g' \circ f'(a) = 0$.

2. Étude de l'injectivité de h.
a. Soit $b \in B$ tel que $h(b) = 0$. Montrer que $g(b) = 0$.
b. Justifier qu'il existe $a \in A$ tel que $f(a) = b$.
c. En calculant $f'(a)$, montrer que $b = 0$ et conclure.

3. Étude de la surjectivité de h.
a. Soit $b' \in B'$. Montrer qu'il existe $b \in B$ tel que $g(b) = g'(b')$.
b. Justifier que $h(b) - b' \in \mathrm{Im}\, f'$ puis $h(b) - b' \in \mathrm{Im}\, h$.
c. Conclure.

9 ★ Soit $(a,b) \in \mathbb{K} \times (\mathbb{K} \setminus \{0\})$. On considère l'ensemble E des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ vérifiant la relation de récurrence
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n.$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

2. **a.** Montrer que l'application
$$\varphi : E \longrightarrow \mathbb{K}^2, (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (u_0, u_1)$$
est un isomorphisme de E sur $\mathbb{K}^2$.
b. En déduire que E est de dimension 2.

3. En déduire une démonstration du résultat du cours donnant une description des éléments de E.

10 ✎ Pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné, montrer que l'ensemble
$$H = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] : \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$$
est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$; en déterminer la dimension puis en donner une base.

11 ★ Soient $n \geqslant 1$ et $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des scalaires deux-à-deux distincts. Justifier que pour tous scalaires $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$, il existe un unique polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{P}(a_i) = \lambda_i$ pour tout $i \in [\![0, n]\!]$.
Indication. On pourra introduire l'application

$$\varphi : \mathrm{P} \in \mathbb{K}_n[\mathrm{X}] \longmapsto \big(\mathrm{P}(a_0), \mathrm{P}(a_1), \ldots, \mathrm{P}(a_n)\big).$$

12 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{A} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice non nulle.
On considère l'application $f : \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall \mathrm{M} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), \qquad f(\mathrm{M}) = \mathrm{M} + (\operatorname{tr} \mathrm{M})\mathrm{A}.$$

1. Montrer que si $\operatorname{tr} \mathrm{A} \neq -1$, alors f est bijective.
2. On suppose dans cette question que $\operatorname{tr} \mathrm{A} = -1$.
   a. Déterminer le noyau de f.
   b. Montrer que :
   $$\operatorname{Im} f = \{\mathrm{M} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}) : \operatorname{tr} \mathrm{M} = 0\}.$$
3. Soit $\mathrm{B} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre l'équation
   $$\mathrm{X} + (\operatorname{tr} \mathrm{X})\mathrm{A} = \mathrm{B}$$
   d'inconnue $\mathrm{X} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

13 Soit f un endomorphisme donné d'un espace vectoriel E de dimension n.
Déterminer la dimension de

$$\mathrm{F} = \{g \in \mathbf{L}(\mathrm{E}) : g \circ f = f \circ g = 0\}.$$

14 Soient E un espace vectoriel de dimension finie et u, v deux endomorphismes de E. On suppose que

$$\mathrm{E} = \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v = \operatorname{Ker} u + \operatorname{Ker} v.$$

Montrer que ces deux sommes sont directes.

15 ✎ Donner une base du noyau et de l'image de l'application linéaire canoniquement associée à la matrice suivante :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -4 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

16 ✎ Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ canoniquement associé à la matrice

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $f^2(\mathrm{P}_0) - 6f(\mathrm{P}_0)$ où $\mathrm{P}_0 = 2\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} - 1$.
2. Déterminer une base de $\operatorname{Ker}(f - 2\,\mathrm{id})$ et $\operatorname{Ker}(f - 4\,\mathrm{id})$.
3. Montrer que $f^2(\mathrm{P}) = 6f(\mathrm{P}) - 8\mathrm{P}$ pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.

17 On considère l'application f qui, à $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$, associe

$$f(\mathrm{P}) = -\frac{1}{6}\mathrm{P}^{(3)}(0) \cdot (\mathrm{X}^3 - \mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X}) - \frac{1}{2}\mathrm{P}''(0) \cdot (\mathrm{X}^2 - 3\mathrm{X}) + 2\mathrm{P}'(0) \cdot \mathrm{X} + 2\mathrm{P}(0).$$

1. Justifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$.
2. Déterminer la matrice A représentant f en base canonique.
3. Montrer que $\underline{e} = \big(1, \mathrm{X}, \mathrm{X}(\mathrm{X}-1), \mathrm{X}(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2)\big)$ est une base de $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$. Déterminer la matrice de passage P de la base canonique à la base $\underline{e}$.
4. Exprimer la matrice B de f en base $\underline{e}$.
5. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer B^n et en déduire A^n.

18 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}^*$.

1. Vérifier que $f : \mathrm{P}(\mathrm{X}) \longmapsto \mathrm{P}(\mathrm{X} + a)$ définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.
2. Déterminer la matrice A de f en base canonique.
3. Justifier que A est inversible et calculer A^{-1}.
4. Montrer que pour tout $p, q \in [\![0, n]\!]$ tels que $p < q$, on a :
   $$\sum_{k=p}^{q} (-1)^{q-k} \binom{k}{p} \binom{q}{k} = 0.$$

19 ✎ On considère deux espaces vectoriels E et F de dimensions respectives 3 et 2, rapportés respectivement à des bases $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3)$ et $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.
Soit $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ l'application linéaire représentée dans les bases $\underline{e}$ et $\underline{\varepsilon}$ par la matrice

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. On pose $e_1' = e_2 + e_3$, $e_2' = e_3 + e_1$ et $e_3' = e_1 + e_2$. Déterminer la matrice B représentative de f dans les bases $\underline{e}'$ et $\underline{\varepsilon}$.
2. On pose $\varepsilon_1' = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ et $\varepsilon_2' = 5\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2$. Déterminer la matrice C représentative de f dans les bases $\underline{e}'$ et $\underline{\varepsilon}'$.

20 ✎ Montrer que les matrices

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sont semblables.

21 Vérifier que les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 16 & -1 \\ 232 & -15 \end{pmatrix}$$

sont semblables et trouver toutes les matrices P inversibles telles que $P^{-1}AP = B$.

22 Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$.
Déterminer $\operatorname{rg} f$ et $\operatorname{rg} f^2$ ainsi que la dimension de $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Ker} f^2$ puis montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle f est représentée par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

23 ✎ Soient $E = \mathbb{R}_2[X]$ et u, v les endomorphismes de E définis par

$$u : P(X) \longmapsto P(X+1) \qquad \text{et} \qquad v : P(X) \longmapsto P(X-1).$$

Discuter, en fonction du réel k, le rang de l'endomorphisme $u + kv$ de E.

24 Peut-on trouver deux matrices $A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB - BA = I_n$?

25 Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

1. Soit f un endomorphisme de E. Justifier que toutes les matrices représentatives de f ont même trace ; cette valeur commune est appelée trace de l'endomorphisme f et notée $\operatorname{tr} f$.
2. Soit p un projecteur de E. Montrer que $\operatorname{tr} p = \operatorname{rg} p$.

26 ✎ Dans $\mathbb{R}^n$, montrer que

$$G = \{(x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n : x_1 = x_2 = \cdots = x_n\} \quad \text{et} \quad H = \left\{(x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i = 0\right\}$$

sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires.

27 ★ **Théorème noyau-image**
Soient $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire et H un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ dans E.
Montrer que f induit un isomorphisme de H sur $\operatorname{Im} f$.

28 ★♣ Soit φ l'application qui à tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ associe le polynôme $Q = \varphi(P)$ défini par $Q(X) = P(X+1) + P(X)$.

1. Vérifier que φ est un endomorpisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. **a.** Montrer que $\operatorname{Ker} \varphi = \{0\}$. Qu'en déduit-on pour φ ?
   b. Pour $n \in \mathbb{N}$, justifier que φ induit sur $\mathbb{R}_n[X]$ un endomorphisme φ_n surjectif.
   c. En déduire que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
3. Soient $\psi = \varphi - 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}[X]}$ et H l'ensemble des polynômes s'annulant en 0. On note $H_n = H \cap \mathbb{R}_n[X]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   a. Justifier que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$, ainsi que H_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   b. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, exprimer le degré de $\psi(P)$ en fonction de celui de P.
   c. En déduire que $\operatorname{Ker} \psi = \mathbb{R}_0[X]$.
   d. Montrer que $\operatorname{Ker} \psi$ et H sont supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$. En déduire que ψ induit un isomorphisme de H sur $\operatorname{Im} \psi$.
   e. Montrer que ψ est surjective.
4. En déduire l'existence d'une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes telle que $U_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$U_n(0) = 0 \quad \text{et} \quad U_n(X+1) = U_n(X) + U_{n-1}(X).$$
Préciser le degré de U_n et son coefficient dominant.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(U_0, U_1, \ldots, U_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
6. Justifier l'existence et l'unicité d'une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes telle que $\varphi(P_n) = 2X^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
7. **a.** Démontrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad P_n(1-x) = (-1)^n P_n(x).$$
   b. En déduire les valeurs de $P_{2n}(0)$, $P_{2n}(1)$ et $P_{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   c. Démontrer que $P_n' = nP_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer P_3, P_4 et P_5.
   d. Dresser le tableau de variations des restrictions des fonctions polynomiales P_n à l'intervalle $[0, 1]$ (on pourra utilier une récurence sur n).

29 ✎ On se place dans $\mathbb{R}^3$. Calculer la matrice représentant dans la base canonique la composée de l'homothétie de rapport 5 et de la projection sur le plan d'équation $x + y + 2z = 0$ parallèlement à la droite dirigée par le vecteur $(1, 2, 1)$.

30 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p un projecteur de E. On définit l'application π de $\mathbf{L}(E)$ dans lui-même en posant, pour tout $u \in \mathbf{L}(E)$, $\pi(u) = p \circ u$. Montrer que π est un projecteur de $\mathbf{L}(E)$.

31 ✎ Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p, q deux projecteurs de E.

1. Montrer que $p \circ q = q$ si, et seulement si, $\operatorname{Im} q \subset \operatorname{Im} p$.
2. Montrer que $p \circ q = p$ si, et seulement si, $\operatorname{Ker} q \subset \operatorname{Ker} p$.

32 ✎ Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, p un projecteur de E et u un endomorphisme de E.
Montrer que u commute avec p si, et seulement si, les sous-espaces $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$ sont stables par u.

33 ★ Soient E un espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E.

1. Montrer qu'on a équivalence entre les assertions suivantes :
(i) $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2$; (ii) $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} u^2$; (iii) $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$.

2. Donner des exemples d'endomorphismes vérifiant ces conditions.

3. Le résultat subsiste-t-il en dimension infinie ?

34 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une matrice $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ est dite magique s'il existe un scalaire τ_A tel que les sommes des coefficients se trouvant sur chaque ligne, sur chaque colonne et sur chaque diagonale de A soient toutes égales à τ_A.

1. a. Vérifier que l'ensemble $\mathcal{M}$ des matrices magiques de $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel pour les lois matricielles usuelles.

b. Justifier que $\tau : A \longmapsto \tau_A$ est une application linéaire sur $\mathcal{M}$.

2. Montrer que les ensembles E des matrices A magiques symétriques telles que $\tau_A = 0$, F des matrices magiques antisymétriques et G des matrices dont tous les coefficients sont égaux sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}$.

35 Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E tel que $f^3 = \mathrm{id}_E$.
Montrer que :

$$E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - j\,\mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - j^2\,\mathrm{id}_E).$$

36 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie rapporté à une base $(e_1, \dots, e_n)$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on considère le sous-espace vectoriel F_i de E engendré par la famille $(e_j)_{j \neq i}$ ainsi que le sous-espace vectoriel $G_i = \{f \in \mathbf{L}(E) : \mathrm{Ker}\, f \supset F_i\}$ de $\mathbf{L}(E)$. Montrer que :

$$\mathbf{L}(E) = \bigoplus_{i=1}^{n} G_i.$$

37 ★ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On s'intéresse aux endomorphismes f de E qui commutent avec tous les autres :

$$\forall g \in \mathbf{L}(E), \qquad f \circ g = g \circ f. \qquad (*)$$

1. Proposer des solutions évidentes.

2. On suppose dans cette question l'espace E de dimension finie n. En raisonnant matriciellement, déterminer tous les endomorphismes f de E réalisant $(*)$.
Indication. On utilisera la base canonique de $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$.

3. a. Démontrer le lemme suivant, intéressant en lui-même et souvent utile : un endomorphisme f de E est une homothétie si, et seulement si, pour tout $x \in E$, la famille $\big(x, f(x)\big)$ est liée.

b. En raisonnant géométriquement, et à l'aide du lemme précédent, déterminer tous les endomorphismes f de E satisfaisant $(*)$.
Indication. On écrira qu'un tel endomorphisme f commute en particulier avec les symétries.

38 ★♣ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et f un endomorphisme de E. On suppose f nilpotent, i.e. l'existence d'un entier $k \geqslant 1$ tel que $f^k = 0$. On appelle indice de nilpotence p de f le plus petit entier $k \geqslant 1$ tel que $f^k = 0$; on a donc $f^{p-1} \neq 0$ et $f^p = 0$.

1. Soit $x_0 \in E$ tel que $f^{p-1}(x_0) \neq 0$. Montrer que la famille $\big(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0)\big)$ est libre. Qu'en déduit-on sur f^n ?

On suppose, dans le reste de l'exercice, que l'indice de nilpotence de f est égal à n.

2. Montrer que, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $\dim(\mathrm{Ker}\, f^j) = j$.

3. En déduire que si F est un sous-espace vectoriel de dimension d de E, stable par f, alors $F = \mathrm{Ker}\, f^d$.

39 ♣ Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et f un endomorphisme de E. On pose :

$$F = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{Ker}\, f^k \qquad \text{et} \qquad G = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{Im}\, f^k.$$

1. a. Justifier que les suites $(\mathrm{Ker}\, f^k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(\mathrm{Im}\, f^k)_{k \in \mathbb{N}}$ sont respectivement croissante et décroissante pour l'inclusion.

b. En déduire qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $F = \mathrm{Ker}\, f^p$ et $G = \mathrm{Im}\, f^p$.

2. Montrer que :
(i) F et G sont des sous-espaces vectoriels de E stables par f ;
(ii) l'endomorphisme f induit sur F un endomorphisme f_F nilpotent et sur G un endomorphisme f_G bijectif ;
(iii) les sous-espaces F et G sont supplémentaires dans E.

3. Établir l'unicité du couple (F, G) satisfaisant les trois conditions précédentes. On dit que le couple (F, G) réalise la décomposition de Fitting de E pour l'endomorphisme f.

40 ♣ On considère l'endomorphisme $d : P \longmapsto P'$ de $\mathbb{K}[X]$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}_n[X]$ stables par d.
Indication. Si $F \neq \{0\}$ est un sous-espace de $\mathbb{K}_n[X]$ stable par d, on pourra considérer un polynôme de degré maximal dans F.

2. En déduire les sous-espaces vectoriels de dimension finie de $\mathbb{K}[X]$ qui sont stables par d.

3. En déduire les sous-espaces vectoriels de dimension infinie de $\mathbb{K}[X]$ qui sont stables par d.