Vecteurs aléatoires discrets

Feuille d'exercices

1 ✎ Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\{0,1\}$ telles que :

$$\mathbb{P}(X=0,Y=0)=\frac{1}{6}+p,\quad \mathbb{P}(X=0,Y=1)=\frac{1}{2}-p,$$
$$\mathbb{P}(X=1,Y=0)=\frac{1}{3}-p,\quad \mathbb{P}(X=1,Y=1)=p.$$

1. Déterminer les valeurs de p pour lesquelles les formules précédentes définissent une loi conjointe.
2. Identifier les lois de X et Y.
3. Déterminer la loi de $X+Y$.
4. Calculer $\text{cov}(X,Y)$ et le coefficient de corrélation.
5. Pour quelles valeurs de p les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

2 ✎ Soient X et Y deux variables indépendantes de même loi, à valeurs dans $\mathbb{N}$, telles que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \mathbb{P}(X=n)=\mathbb{P}(Y=n)=\frac{1}{4}\frac{1+a^n}{n!},$$

où a est un réel donné.

1. Déterminer a.
2. Montrer que X admet une espérance que l'on déterminera.
3. Déterminer la loi de $X+Y$ en fonction de a.

3 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement la loi de Poisson de paramètre $\lambda>0$ et la loi géométrique de paramètre $p\in\,]0,1[$.
On définit la matrice aléatoire

$$A:\omega\in\Omega\longmapsto\begin{pmatrix}X(\omega) & Y(\omega)-1\\ Y(\omega)-1 & X(\omega)\end{pmatrix}.$$

Déterminer la probabilité que A soit inversible.

4 Soient $p,q\in\,]0,1[$ tels que $p+q=1$. On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y, à valeurs dans $\mathbb{N}$, de loi commune donnée par :

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad \mathbb{P}(X=k)=\mathbb{P}(Y=k)=pq^k.$$

1. Déterminer la loi de $X+Y$.
2. Pour $n\in\mathbb{N}$, déterminer la loi de X conditionnellement à l'événement $[X+Y=n]$.
3. On pose $V=Y-X$ et $M=\min(X,Y)$.
   a. Calculer $\mathbb{P}(M\geqslant k)$ pour $k\in\mathbb{N}$. En déduire la loi de M.
   b. Déterminer la loi du couple (M,V).
   c. En déduire la loi de V. Les variables M et V sont-elles indépendantes ?

5 ✎ Trois personnes A_1, A_2 et A_3 entrent à l'instant 0 dans un bureau de poste qui ne comporte que deux guichets. Les personnes A_1 et A_2 sont servies immédiatement alors que A_3 doit attendre qu'un guichet se libère avant d'être servie. On suppose que le temps est mesuré par des nombres entiers dans une unité fixée.
Soit $p\in\,]0,1[$. On suppose que pour tout $i\in\{1,2,3\}$, le temps de service de la personne A_i est une variable aléatoire X_i à valeurs dans $\mathbb{N}$, de loi définie par :

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad \mathbb{P}(X_i=k)=(1-p)p^k.$$

On suppose les variables X_1, X_2 et X_3 indépendantes. On considère enfin la variable aléatoire Y égale à l'instant de la première sortie (celle de A_1 ou A_2) qui est aussi l'instant où A_3 commence à se faire servir, ainsi que la variable Z égale à l'instant de sortie de A_3.

1. Déterminer la loi de Y.
2. Exprimer Z en fonction de Y et X_3. Donner la loi de Z.
3. Calculer le temps moyen passé par A_3 à la poste.

6 ♣ *Oral HEC 2007*
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$. On suppose que X et Y sont indépendantes et que X et $X+Y$ ont même loi.

1. **a.** Soit $\sum a_n$ une série convergente à termes réels positifs. Justifier l'existence du réel $M=\max_n a_n$.
   b. En déduire que l'ensemble $\{\mathbb{P}(X=x)\}_{x\in\mathbb{R}}$ admet un plus grand élément.

On considère un réel a tel que $\mathbb{P}(X=a)=\max_{x\in\mathbb{R}}\mathbb{P}(X=x)$.

2. **a.** Montrer que pour tout $y\in\mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X=a-y)=\mathbb{P}(X=a)$ ou $\mathbb{P}(Y=y)=0$.
   b. En déduire que la variable Y est finie.
3. Soit $\mu\in\mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}(Y=\mu)>0$. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X=a-n\mu)=\mathbb{P}(X=a)$.
4. Montrer que la variable Y est presque sûrement nulle.

7 Soit (X,Y) un couple aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ tel que :

$$\forall(i,j)\in\mathbb{N}^2,\quad \mathbb{P}(X=i,Y=j)=\frac{\alpha}{(i+j+1)!},$$

où α est un paramètre réel.

1. Déterminer α.
   Indication. On pourra sommer selon les paquets $I_k=\{(i,j)\in\mathbb{N}^2 : i+j=k\}$, $k\in\mathbb{N}$.
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Calculer $\mathbb{E}(2^{X+Y})$.
4. Déterminer la loi de $S=X+Y$ et retrouver le résultat de la question précédente.

8 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $S = X + Y$ et $T = X - Y$.

1. Déterminer la loi conjointe du couple (S,T).
2. Calculer $\mathrm{cov}(S,T)$.
3. Les variables S et T sont-elles indépendantes ?

9 ★ Soient X et Y deux variarbles aléatoires de Bernoulli.

1. Montrer que $|\mathrm{cov}(X,Y)| \leqslant \frac{1}{4}$.
2. Montrer que X et Y sont indépendantes si, et seulement si, $\mathrm{cov}(X,Y) = 0$.

10 On pourra utiliser la formule :

$$\forall n, p \in \mathbb{N}, \qquad p \leqslant n \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Pour un entier $n \geqslant 2$ donné, on considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On tire simultanément deux boules au hasard et on note X (resp. Y) la variable aléatoire égale au plus petit (resp. grand) des deux numéros tirés.

1. Déterminer la loi du couple (X,Y). En déduire les lois marginales de X et Y.
2. Calculer $\mathbb{E}(Y)$ puis $\mathbb{E}\big(Y(Y-2)\big)$. En déduire $\mathbb{V}(Y)$.
3. Montrer que $n+1-X$ a même loi que Y. En déduire $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
4. Calculer $\mathbb{E}\big(X(Y-2)\big)$ et en déduire $\mathrm{cov}(X,Y)$.
5. Pour quelles valeurs de n le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y est-il défini ? Déterminer sa valeur dans ce cas.

11 ★ On répète, de façon indépendante, une expérience aléatoire au cours de laquelle un événement A est susceptible de se réaliser avec probabilité $p \in]0,1[$. On note X la variable aléatoire égale au rang de la première réalisation de l'événement A et Y celle égale au rang de sa deuxième réalisation.

1. Déterminer la loi du couple (X,Y). En déduire les lois marginales de X et Y.
2. Montrer que X et Y admettent chacune une espérance et une variance que l'on déterminera.
3. Montrer que le couple (X,Y) admet une covariance que l'on calculera, ainsi que le coefficient de corrélation linéaire associé.
4. Pour $n \geqslant 2$ donné, déterminer la loi de X conditionnellement à l'événement $[Y = n]$.

12 ★ Le nombre N d'usagers se présentant à un bureau de poste suit une loi de Poisson de paramètre λ. Chaque usager vient avec probabilité $p \in]0,1[$ pour poster un envoi et avec probabilité $q = 1-p$ pour une autre opération. On suppose que les usagers n'effectuent chacun qu'une opération, et qu'ils font cette opération indépendamment les uns des autres.

On note X le nombre d'usagers venant poster une lettre et Y le nombre d'usagers venant pour une autre opération.

1. Pour $j \in \mathbb{N}$, déterminer la loi de X sachant $N = j$.
2. Déterminer la loi conjointe du couple (X,N).
3. En déduire la loi de X. Donner sans calcul les valeurs de $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
4. Montrer que X et Y sont indépendantes.
5. En utilisant la relation $N = X + Y$, calculer $\mathrm{cov}(X,N)$. Commenter le signe.
6. Calculer le coefficient de corrélation $\varrho_{X,N}$. La variable N peut-elle être fonction affine de Y ?

13 ★ Étant donné un entier $n \geqslant 2$, on considère deux variables aléatoires X_1 et X_2 indépendantes de même loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.

1. Déterminer la loi de $U = \max(X_1,X_2)$. En déduire celle de $V = \min(X_1,X_2)$.
2. Justifier que U et V admettent chacune une espérance et une variance que l'on déterminera.
3. Calculer $\mathbb{V}(U+V)$ puis en déduire la valeur de $\mathrm{cov}(U,V)$.
4. Déterminer la loi de $S = X_1 + X_2$.

14 *Oral HEC 2009*

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et de même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.
On pose $q = 1-p$, $U = X_1 + X_2$ et $T = X_1 - X_2$.

1. Déterminer la loi de U.
2. Soit un entier naturel $n \geqslant 2$.
   a. Déterminer la loi conditionnelle de X_1 sachant l'événement $[U = n]$.
   b. Calculer l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(X_1 \,|\, U = n)$. En déduire la valeur de $\mathbb{E}(X_1)$.
3. Déterminer la loi de T.
4. a. Calculer $\mathrm{cov}(U,T)$.
   b. Les variables aléatoires U et T sont-elles indépendantes ?

15 ★ *Oral ESCP 2009*

Une personne envoie des courriers électroniques via deux serveurs notés A et B. L'expérience montre que le serveur A est choisi avec la probabilité $p \in]0,1[$ et le serveur B le reste du temps, les choix successifs étant supposés indépendants.
Les envois sont représentés par une suite de lettres. La séquence ABBBAAB... signifie par exemple que le premier message a transité par le serveur A, les trois suivants par B, les cinquième et sixième par A, le suivant par B et ainsi de suite... On dit, sur cet exemple, que l'on a une première série de longueur 1, une deuxième de longueur 3, une troisième de longueur 2, ...
On note L_1 la variable aléatoire égale à la longueur de la première série, L_2 celle de la deuxième série et L_3 de la troisième série.

1. **a.** Déterminer la loi de L_1.
   b. Montrer que L_1 admet une espérance, que l'on calculera, et une variance.
2. **a.** Donner la loi du couple (L_1, L_2).
   b. En déduire la loi de L_2.
   c. Calculer l'espérance $\mathbb{E}(L_2)$.
3. Déterminer la loi de L_3.
4. **a.** Justifier l'existence de la covariance $\mathrm{cov}(L_1, L_2)$.
   b. Calculer cette covariance et préciser son signe.

16 ★ Une urne contient des boules blanches en proportion $b \in]0,1[$, des boules rouges en proportion $r \in]0,1[$ et des boules jaunes en proportion $j \in]0,1[$ telles que $b+r+j=1$. On effectue dans cette urne $n \geqslant 1$ tirages avec remise. On note respectivement B, R et J le nombre de boules blanches, rouges et jaunes obtenues.

1. Donner les lois des variables aléatoires B, R et J, leurs espérances et leurs variances.
2. Donner la loi de $B+R$ et en déduire la valeur de $\mathrm{cov}(B, R)$.
3. Déterminer la loi du vecteur aléatoire $X = (B, R, J)$.

17 ✎ Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi de Poisson de paramètre 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et $Z_n = \mathbf{e}^{-S_n/n}$.
Déterminer la limite de $\mathbb{E}(Z_n)$ lorsque $n \to \infty$.

18 ★ On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$, de même loi et admettant une espérance. On considère une autre variable aléatoire N, indépendantes des X_n, $n \in \mathbb{N}^*$, et à valeurs dans $\mathbb{N}$. On définit alors la variable

$$S : \omega \in \Omega \longmapsto \begin{cases} X_1(\omega) + \cdots + X_{N(\omega)}(\omega) & \text{si } N(\omega) \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{P}(N = n) > 0$. Montrer que S admet une espérance conditionnelle sachant $[N = n]$ que l'on calculera.
2. En déduire que S admet une espérance donnée par $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(N)\,\mathbb{E}(X_1)$.

19 ✎ Soit $p \in]0,1[$ un réel fixé dans tout l'exercice. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on considère une variable aléatoire X_k suivant une loi de Bernoulli de paramètre p^k. On suppose que les variables aléatoires X_k, $k \in \mathbb{N}^*$, sont mutuellement indépendantes.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_k = X_k X_{k+1}$. Dans la suite de l'énoncé, $n \geqslant 1$ désigne un entier naturel donné.

1. Déterminer l'espérance et la variance de $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.
2. **a.** Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la loi de Y_k.
   b. En déduire l'espérance de $T_n = Y_1 + \cdots + Y_n$.
3. **a.** Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la loi de $Y_k Y_{k+1}$.
   b. Déterminer, pour tous $k, j \in \mathbb{N}^*$, la covariance $\mathrm{cov}(Y_k, Y_j)$.
   c. En déduire la variance de T_n.

20 Soient a et n deux entiers naturels non nuls. On considère na consommateurs qui achètent chacun un bien chez l'un des n fournisseurs $F_1, \dots, F_n$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on considère le nombre X_i de consommateurs ayant acheté leur bien chez le fournisseur F_i. On note également Y le nombre de fournisseurs n'ayant vendu aucun bien.

1. Déterminer la loi, l'espérance et la variance des variables X_i, $1 \leqslant i \leqslant n$.
2. **a.** Que vaut la somme $X_1 + \cdots + X_n$? En déduire la valeur de $\mathbb{E}(X_i X_j)$ puis de $\mathrm{cov}(X_i, X_j)$ pour $i \neq j$.
   b. Préciser le coefficient de corrélation linéaire entre les variables X_i et X_j. Interpréter le cas $n = 2$.
3. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on considère la variable aléatoire B_i valant 1 lorsque le fournisseur F_i n'a vendu aucun bien et 0 sinon.
   a. Exprimer Y en fonction des variables $B_1, \dots, B_n$. Calculer $\mathbb{E}(Y)$.
   b. Calculer $\mathrm{cov}(B_i, B_j)$ pour $i, j \in [\![1, n]\!]$.
4. Calculer $\mathbb{V}(Y)$.

21 Une boîte contient $n \geqslant 1$ boules numérotées de 1 à n. On vide cette boîte par des tirages successifs d'une boule sans remise. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note Y_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule numérotée i a été tirée au i-ième tirage et 0 sinon.

1. Calculer $\mathbb{E}(Y_i)$ pour $i \in [\![1, n]\!]$.
2. Calculer $\mathbb{E}(Y_i Y_j)$ pour $1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n$.
3. Déterminer $\mathrm{cov}(Y_i, Y_j)$ pour $1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n$. Les variables Y_i et Y_j sont-elles indépendantes ?
4. Calculer l'espérance et la variance de $T_n = \sum_{i=1}^n Y_i$.
5. Quelle est la probabilité pour qu'il n'y ait aucune coïncidence entre le numéro d'une boule et son ordre d'apparition lors du tirage ?

22 Une chaîne de fabrication produit des objets dont certains peuvent être défectueux. Pour modéliser ce processus, on considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètre $p \in]0,1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable X_n prend la valeur 1 si le n-ième objet fabriqué est défectueux et prend la valeur 0 s'il est de bonne qualité.
Pour contrôler la qualité des objets produits, on effectue des prélèvements aléatoires et on considère une suite $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètre $p' \in]0,1[$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Y_n prend la valeur 1 si le n-ième objet produit est contrôlé et 0 s'il ne l'est pas.
On suppose que les variables aléatoires X_n, Y_n, $n \in \mathbb{N}^*$, sont toutes indépendantes entre elles.
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $Z_n = X_n Y_n$.
L'objet de l'exercice est d'étudier le nombre d'objets défectueux produits par la chaîne avant qu'un objet défectueux ait été détecté.

1. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de la variable aléatoire Z_n et la covariance $\mathrm{cov}(X_n, Z_n)$. Les variables aléatoires X_n et Z_n sont-elles indépendantes ?

On admettra qu'il résulte des hypothèses que pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné, la variable aléatoire Z_n est indépendante des variables aléatoires X_i, Y_i et Z_i, $i \neq n$.

2. On introduit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement A_n : « le n-ième objet fabriqué est le premier qui ait été contrôlé et trouvé défectueux ».
 a. Exprimer A_n à l'aide des variables aléatoires $Z_1, \dots, Z_n$ et déterminer $\mathbb{P}(A_n)$.
 b. Montrer qu'on détecte presque sûrement au moins un objet défectueux.

3. Soit un entier $n \geqslant 2$.
 a. Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, calculer la probabilité des événements $[X_k = 1] \cap A_n$ et $[X_k = 1] \cap [Z_k = 0]$. On note B_k l'événement $[Z_k = 0]$. Montrer que :

$$\mathbb{P}_{A_n}(X_k = 1) = \mathbb{P}_{B_n}(X_k = 1) = \frac{p - pp'}{1 - pp'}.$$

 b. Montrer que pour tous $x_1, \dots, x_{n-1} \in \{0, 1\}$,

$$\mathbb{P}_{A_n}(X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}) = \prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}_{A_n}(X_i = x_i).$$

 c. Soit $S_n = X_1 + \dots + X_{n-1}$ le nombre d'objets défectueux avant le n-ième objet. Pour $m \in [\![0, n-1]\!]$, calculer $\mathbb{P}_{A_n}(S_n = m)$.
 d. Déterminer l'espérance de S_n conditionnellement à A_n.

23 ★ **Fonction génératrice d'une variable aléatoire**, *oral ESCP 2006*

1. Soit $m > 0$ un entier et X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, m]\!]$. On appelle *fonction génératrice* de X la fonction G_X de la variable réelle $t \in \mathbb{R}_+$ définie par :

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{m} \mathbb{P}(X = k) t^k.$$

 a. Déterminer G_X si X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.
 b. Justifier la formule $G_X(t) = \mathbb{E}(t^X)$ puis montrer que :

$$\mathbb{E}(X) = G'_X(1) \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - \big(G'_X(1)\big)^2.$$

2. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes, de même loi, à valeurs dans $[\![0, m]\!]$. On considère une variable aléatoire N, indépendante de $X_1, \dots, X_n$ et à valeurs dans $[\![1, n]\!]$. On définit la variable aléatoire

$$Y : \omega \longmapsto \sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega).$$

 a. Montrer que $G_Y = G_N \circ G_X$ où $X = X_1$.
 b. En déduire une expression de l'espérance et de la variance de Y en fonction de celles de X et N.

3. Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n et on dispose d'une pièce de monnaie qui donne le côté pile avec probabilité $p \in]0, 1[$. Un joueur tire un jeton dans l'urne et lance ensuite la pièce de monnaie autant de fois que le numéro indiqué par le jeton. Calculer la moyenne et la variance de la variable aléatoire comptabilisant le nombre de piles obtenus.