

Révisions de probabilités générales et discrètes

Feuille d'exercices

- 1** On dispose de n boîtes pouvant chacune contenir jusqu'à n boules. On considère n boules numérotées de 1 à n , que l'on répartit au hasard dans les n boîtes.
- Montrer que la probabilité p_n que chaque boîte contienne exactement une boule vaut $p_n = \frac{n!}{n^n}$.
 - Montrer que $\frac{p_n}{p_{n+1}} \geq 2$.
 - Quelle est la limite de p_n lorsque $n \rightarrow \infty$?
- 2** Deux joueurs A et B jouent une suite de parties avec une probabilité $p \in]0, 1[$ de victoire pour A à chaque partie. Les parties sont indépendantes les unes des autres. Le jeu s'arrête dès que l'un des deux joueurs a gagné deux parties de plus que l'autre.
- Justifier que si le jeu n'est pas fini au bout de $2n$ parties, alors les joueurs sont à égalité à ce moment.
 - Pour $n \in \mathbb{N}$, on note C_n l'événement « les joueurs sont à égalité au bout de $2n$ parties » (ce qui sous-entend qu'il n'y a pas eu de victoire avant) et $p_n = \mathbb{P}(C_n)$. Déterminer une relation entre p_{n+1} et p_n et en déduire une expression de p_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
 - Quelle est la probabilité que A gagne ? que B gagne ?
 - Montrer que le jeu s'arrête presque sûrement.
- 3** Un signal binaire (de valeur 0 ou 1) doit transiter par n relais. Au passage de chaque relais, le signal est susceptible d'être modifié avec probabilité p . On suppose que les relais sont indépendants. On note p_n la probabilité que le signal transmis soit identique au signal émis. On conviendra que $p_0 = 1$.
- Montrer que pour $n \geq 1$, $p_n = p + (1 - 2p)p_{n-1}$.
 - En déduire une expression de p_n en fonction de n .
 - Déterminer la limite de p_n lorsque $n \rightarrow \infty$.
- 4** On dispose de $N + 1$ urnes numérotées de 0 à N . L'urne k contient k boules blanches et $N - k$ boules noires. On choisit une urne au hasard dans laquelle on tire n boules avec remise.
- Quelle est la probabilité d'obtenir n boules blanches au cours des n tirages ?
 - Déterminer la limite de cette probabilité lorsque $N \rightarrow \infty$.
- 5** On considère une pièce dont la face pile a une probabilité $p \in]0, 1[$ d'apparaître.
- Montrer qu'au cours d'une suite infinie de lancers indépendants, la face pile apparaîtra presque sûrement au moins une fois.

- 6** Pour remporter un jeu télévisé, les concurrents doivent répondre à des questions de plus en plus difficiles. On estime que la probabilité pour qu'un concurrent donne la réponse correcte à la n -ième question est égale à $\frac{1}{n}$. Ils n'ont droit qu'à une seule réponse par question. Une mauvaise réponse entraîne l'élimination. On note X le nombre de réponses données par un candidat.
- Déterminer la loi de X .
 - Calculer $\mathbb{E}(X)$.
- 7** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$. On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$ telle que :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{a}{k+1} \binom{n}{k}.$$

- Déterminer le réel a .
 - Calculer $\mathbb{E}(X)$.
 - Calculer $\mathbb{V}(X)$.
- 8** On effectue une première série de lancers d'une pièce équilibrée. On note N le rang du premier « pile » obtenu. On effectue alors une seconde série de N lancers. On note X le nombre de « pile » obtenus lors de cette nouvelle série.
- Déterminer la loi, l'espérance et la variance de N .
 - Pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné, déterminer la loi de la variable X conditionnellement à l'événement $[N = n]$.
 - En déduire l'existence et la valeur de $\mathbb{E}(X)$.
 - Déterminer la loi de X , retrouver l'expression de $\mathbb{E}(X)$ et calculer $\mathbb{V}(X)$.
- 9** On considère une urne contenant $N > 1$ boules dont r blanches et $N - r$ noires ($0 < r < N$). Dans cette urne, on prélève les boules une à une et sans remise. On note X le nombre de tirages qu'il est nécessaire d'effectuer pour obtenir toutes les boules blanches.
- Dans le cas $r = 1$, reconnaître la loi de X . Donner son espérance. Même question dans le cas $r = N$.
 - On suppose à présent $1 < r < N$.
 - Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X .
 - Montrer que pour ces valeurs de k ,

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{k-1}{r-1}}{\binom{N}{r}}.$$

- Montrer que :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{r(N+1)}{r+1}.$$

10 Soient n et $N \geq 2$ deux entiers naturels. Un sac contient N boules numérotées de 1 à N . On effectue dans ce sac n tirages d'une boule avec remise. On note Z_n le plus grand numéro obtenu.

1. Calculer $\mathbb{P}(Z_n \leq k)$ pour $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$ et en déduire la loi de Z_n .
2. a. Calculer $\mathbb{E}(Z_n)$.
- b. Déterminer un équivalent de $\mathbb{E}(Z_n)$ lorsque $N \rightarrow \infty$.

11 Soit X une variable aléatoire discrète admettant un moment d'ordre 2.

- ★ 1. Déterminer les réels a minimisant la quantité $\mathbb{E}((X - a)^2)$.
2. On suppose X à valeurs dans $[\alpha, \beta]$ ($\alpha < \beta$ réels). Montrer que $\mathbb{V}(X) \leq (\beta - \alpha)^2$.

12 On lance simultanément deux dés à 6 faces jusqu'à ce que chaque dé ait fait apparaître au moins une fois la face 6. On note X_1 (resp. X_2) le nombre de lancers nécessaires avant d'obtenir un 6 avec le premier dé (resp. le deuxième).

1. a. Quelles sont les lois des variables X_i ?
- b. Déterminer $\mathbb{P}(X_i \leq k)$ pour $k \in \mathbb{N}$.
2. Soit X la variable égale au nombre de lancers (d'un couple de dés) nécessaires avant d'obtenir les deux 6.
 - a. Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{P}(X \leq k)$.
 - b. En déduire la loi de X .
 - c. Déterminer, si elle existe, l'espérance de X .

13 On réalise une suite de lancers d'une pièce équilibrée, chaque lancer amenant donc pile ou face avec probabilité $\frac{1}{2}$. On note P_k (resp. F_k) l'événement « on obtient pile (resp. face) au k -ième lancer ».

On note X la variable aléatoire prenant la valeur k si on obtient pour la première fois pile puis face dans cet ordre aux lancers $k-1$ et k , ou 0 si cette configuration n'apparaît jamais.

1. Calculer $\mathbb{P}(X = 2)$.
2. a. Décomposer l'événement $[X = 3]$ en fonction des événements primaires P_i, F_i , $1 \leq i \leq 3$, et en déduire la valeur de $\mathbb{P}(X = 3)$.
- b. Calculer plus généralement, sur le même principe, $\mathbb{P}(X = k)$ pour $k \geq 2$.
- c. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(X = 0)$.
3. a. Montrer que :

$$\forall k \geq 3, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{2} \mathbb{P}(X = k - 1) + \frac{1}{2^k}.$$

- b. Vérifier qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que la suite de terme général $a^k \mathbb{P}(X = k)$, $k \geq 2$, soit arithmétique, et retrouver l'expression de $\mathbb{P}(X = k)$.
4. Montrer que X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ et la calculer.

14 Soit X une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Calculer l'espérance de $Y = \frac{1}{X+1}$ et $Z = 2^X$.

15 Soit X une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Le compteur chargé d'afficher la valeur de X est défaillant :

- > lorsque X est non nul, il affiche la valeur de X ;
- > lorsque X est nul, il affiche une valeur entière choisie aléatoirement entre 1 et n .

On note Y la valeur affichée par le compteur. Justifier que Y admet une espérance et la calculer.

16 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{Z}^* telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = -n) = \mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{2n(n+1)}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'événement $[X = -n] \cup [X = n]$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X admet une espérance conditionnelle relative à A_n . Étudier la convergence de la série $\sum \mathbb{P}(A_n) \mathbb{E}(X | A_n)$.
2. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

17 Un ascenseur dessert $n \geq 1$ étages d'un immeuble. Lors d'un voyage, on note X le nombre de personnes qui montent dans l'ascenseur au rez-de-chaussée ; on admet que X est une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ . On émet les hypothèses suivantes :

- > Aucun arrêt n'est dû à des personnes désirant monter dans l'ascenseur à un autre niveau que le rez-de-chaussée.
- > Chaque personne choisit son étage au hasard et indépendamment des autres passagers. Ces choix se font dans l'ordre d'entrée des passagers dans l'ascenseur.

On note S le nombre d'arrêts de l'ascenseur lors d'un voyage donné (on ne compte pas l'arrêt initial au rez-de-chaussée).

1. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, montrer que :

$$\mathbb{P}(S = j | X = k + 1) = \frac{j}{n} \mathbb{P}(S = j | X = k) + \frac{n - j + 1}{n} \mathbb{P}(S = j - 1 | X = k).$$

Indication. On pourra considérer les événements $A_{k,j}$: « l'ascenseur compte au moins k passagers et les k premiers sélectionnent j étages distincts ».

2. Après avoir justifié l'existence des espérances conditionnelles, montrer que :

$$\mathbb{E}(S | X = k + 1) = 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \mathbb{E}(S | X = k).$$

3. Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'espérance de S sachant que $X = k$.
4. En déduire que $\mathbb{E}(S) = n(1 - e^{-\lambda/n})$.

18 En utilisant une pièce déséquilibrée dont la probabilité d'apparition de « pile » est $p \in]0, 1[$, deux joueurs A et B s'affrontent selon les modalités suivantes : un des deux joueurs lance la pièce jusqu'à obtenir « pile » pour la première fois. Notant r le nombre de tirages nécessaires, les joueurs lancent alternativement la pièce, en commençant par le joueur B . Le joueur qui obtient le r -ième « pile » de cette nouvelle série de lancers donne

k euros à l'autre joueur, où k est le nombre de tirages effectués lors de cette seconde série de lancers pour obtenir le r -ième « pile ».

On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir le premier « pile » lors de la première série de lancers et Y le gain du joueur A à l'issue de la partie, éventuellement négatif si A a perdu.

- Déterminer la loi de X . Quelle est son espérance et sa variance ?
- Soit $r \in \mathbb{N}^*$.
 - Déterminer la loi de $|Y|$ conditionnée à l'événement $[X = r]$ puis celle de Y .
 - Déterminer l'espérance de $|Y|$ sachant $[X = r]$.
 - Déterminer l'espérance de Y sachant $[X = r]$.
- En déduire l'existence et la valeur de $\mathbb{E}(Y)$.

19 Deux joueurs lancent chacun n fois une pièce équilibrée. Calculer la probabilité que les deux séries de lancers comportent le même nombre de pile.

20 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N}^* .

- ★ 1. On suppose que X suit une loi géométrique.

Montrer que :

$$\forall n, h \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}_{[X > n]}(X > n + h) = \mathbb{P}(X > h). \quad (\star)$$

On dit que la loi géométrique est sans mémoire.

- Réciproquement, on suppose que la condition (\star) est vérifiée.
 - Montrer que la suite $(\mathbb{P}(X > n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $q = \mathbb{P}(X > 1)$.
 - En déduire que X suit une loi géométrique de paramètre $p = 1 - q$.

21 Cet exercice utilise la notion d'indépendance de variables aléatoires discrètes.

- ★ Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z = \inf(X, Y)$.

22 Soit X une variable aléatoire de loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

Déterminer la loi de la variable aléatoire Y définie par :

$$Y = \begin{cases} \frac{X}{2} & \text{si } X \text{ est pair} \\ \frac{X+1}{2} & \text{si } X \text{ est impair} \end{cases}$$

23 Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

- Déterminer les valeurs de k (appelées *modes* de la loi $\mathcal{P}(\lambda)$) qui maximisent la valeur de $\mathbb{P}(X = k)$.
- Pour $k \in \mathbb{N}$ donné, déterminer les valeurs de λ qui maximisent la valeur de $\mathbb{P}(X = k)$.
- Montrer que si $\lambda \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{E}(|X - \lambda|) = \frac{2\lambda^\lambda e^{-\lambda}}{(\lambda - 1)!}$$

24 1. Pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$J_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x e^{-t} t^n dt.$$

- Déterminer une relation entre $J_n(x)$ et $J_{n+1}(x)$.
- En déduire une expression explicite de $J_n(x)$.

2. En déduire que si X est une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X \leq n) = \frac{1}{n!} \int_\lambda^{+\infty} e^{-t} t^n dt.$$

25 **Loi de Pascal et loi binomiale négative**

- ★ On considère un processus binomial de paramètre $p \in]0, 1[$, c'est-à-dire une suite d'épreuves indépendantes telles que chaque épreuve conduit à un succès avec probabilité p et à un échec avec probabilité $q = 1 - p$.

Dans tout l'exercice, on fixe un entier $r > 0$.

- On note X_r le rang d'apparition du r -ième succès.
 - Que dire de X_1 ?
 - Quel est l'ensemble V des valeurs que X_r peut prendre ?
 - Pour tout $k \in V$, calculer $\mathbb{P}(X_r = k)$.
- Calculer la somme $\sum_k \mathbb{P}(X_r = k)$ et en déduire que X_r est une variable aléatoire. On dit que X_r suit la *loi de Pascal* de paramètre (r, p) .
 - Calculer $\mathbb{E}(X_r)$.
 - Calculer $\mathbb{E}(X_r(X_r + 1))$ et en déduire $\mathbb{V}(X_r)$.
- On note Y_r la variable aléatoire donnant le nombre d'échecs précédant le r -ième succès.
 - Quelle relation a-t-on entre X_r et Y_r ?
 - En déduire la loi de Y_r , son espérance et sa variance.
 - Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{N}$, on définit le coefficient binomial généralisé

$$\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)}{k!}.$$

Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \binom{k+r-1}{k} = (-1)^k \binom{-r}{k}$$

et en déduire que :

$$\mathbb{P}(Y_r = k) = \binom{-r}{k} p^r (-q)^k.$$

On dit que Y_r suit la *loi binomiale négative* de paramètre (r, p) .

26 **Tirages sans remise**

- ★ On considère une urne contenant N boules, blanches ou noires, dont une proportion p de boules blanches. On note $q = 1 - p$ la proportion de boules noires.

1. On effectue dans cette urne n tirages sans remise. On note X le nombre de boules blanches obtenues.

Montrer que X est à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$ avec :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{Np}{k} \binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

La loi de X est appelée *loi hypergéométrique* $\mathcal{H}(N, n, p)$.

2. On suppose dans cette question que des tirages sans remise sont effectués jusqu'à ce que l'urne soit vide. Pour $r \in \llbracket 1, Np \rrbracket$, on note X_r le rang d'apparition de la r -ième boule blanche.

Montrer que X_r est à valeurs dans $\llbracket r, Nq + r \rrbracket$ avec :

$$\forall k \in \llbracket r, Nq + r \rrbracket, \quad \mathbb{P}(X_r = k) = \frac{r}{k} \frac{\binom{Np}{r} \binom{Nq}{k-r}}{\binom{N}{k}}.$$

27 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} .

- ★♣ 1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X > k) = \left(\sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(X = k) \right) + (n+1) \mathbb{P}(X > n).$$

2. En déduire que X admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum_k \mathbb{P}(X > k)$ converge, avec dans ce cas :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > k).$$

3. Étant donné un entier $n \geq 2$, on considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n , dans laquelle on effectue $n+1$ tirages successifs d'une boule avec remise. On note X_n la variable aléatoire égale au numéro du tirage où, pour la première fois, on a obtenu un numéro supérieur ou égal au numéro précédent. On note également, pour tout $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, N_k la variable aléatoire égale au numéro obtenu au k -ième tirage.

a. Justifier que X_n est à valeurs dans $\llbracket 2, n+1 \rrbracket$.

b. Calculer $\mathbb{P}(X_n = n+1)$.

c. Pour $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, justifier que $[X_n > k] = [N_1 > N_2 > \dots > N_k]$ et en déduire que :

$$\mathbb{P}(X_n > k) = \frac{1}{n^k} \binom{n}{k}.$$

Vérifier que la formule est encore valable pour $k = 0$ et $k = 1$.

d. Calculer $\mathbb{E}(X_n)$.

4. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N} telles que $0 \leq X \leq Y$. En utilisant le résultat établi en 2., montrer que si Y admet une espérance, alors X aussi.