Travaux dirigés

Séries

ECS2 – Lycée La Bruyère, Versailles

Année 2017/2018

Exercice 1

Traité en classe.

Exercice 2

Question 1

L'étude de la fonction $f : x \longmapsto \frac{\ln x}{x}$ montre qu'elle est décroissante sur $[\mathbf{e}, +\infty[$.
En notant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k f(k),$$

on a alors :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2(n+1)} - S_{2n} = f(2n+2) - f(2n+1) \leqslant 0$ et la suite (S_{2n}) est donc décroissante.
- On montrerait de même que la suite (S_{2n+1}) est croissante.
- Enfin,
$$S_{2n+1} - S_{2n} = -f(2n+1) = -\frac{\ln(2n+1)}{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Ainsi les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. Elles convergent donc vers une limite commune S. Comme ce sont les deux suites extraites principales de la suite (S_n), celle-ci converge également vers S.
Ceci établit la convergence de la série $\sum (-1)^n \frac{\ln n}{n}$, dont (S_n) est la suite des sommes partielles.

Exercice 3

Question 1

On écrit :

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n = \frac{n+1}{n!} = \frac{n}{n!} + \frac{1}{n!} = \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}.$$

On en déduit, par comparaison aux séries exponentielles, la convergence de la série $\sum u_n$ et sa somme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2\mathbf{e}.$$

Exercice 3

Question 2

Pour pouvoir procéder à des simplifications identiques, on décompose le polynôme $X^3 + 2X^2 - 3X - 1$ sur la base $\big(1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2)\big)$ de $\mathbb{R}_3[X]$:

$$X^3 + 2X^2 - 3X - 1 = X(X-1)(X-2) + 5X(X-1) - 1.$$

D'où la convergence de la série et la valeur de sa somme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n^3 + 2n^2 - 3n - 1)\frac{2^n}{n!} = 2^3 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^{n-3}}{(n-3)!} + 5 \cdot 2^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n-2}}{(n-2)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$$
$$= (8 + 20 - 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = 27\mathbf{e}^2.$$

Exercice 3

Question 3

On procède de même pour faire apparaître des séries géométriques dérivées :

$$X^2 + 2X - 1 = (X+2)(X+1) - (X+1) - 2.$$

Les séries géométriques dérivées qui apparaissent sont alors convergente puisque $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$, d'où la convergence et la somme de la série ci-dessous :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 2n - 1)\frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)\Big(\frac{1}{2}\Big)^n - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\Big(\frac{1}{2}\Big)^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{2}\Big)^n$$
$$= \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^3} - \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} - 2\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 8.$$

Exercice 3

Question 4

L'idée est faire apparaître des séries géométriques « primitivées » (cf. remarque à la fin de l'exercice 17) :

$$\forall x \in \,]-1, 1[, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1 - x).$$

On obtient ainsi la convergence et la somme de la série :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big)\frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\Big(\frac{1}{3}\Big)^n - 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}\Big(\frac{1}{3}\Big)^{n+1}$$
$$= \ln\Big(1 - \frac{1}{3}\Big) - 3\Big(\ln\Big(1 - \frac{1}{3}\Big) - \frac{1}{3}\Big) = 2\ln\frac{2}{3} + 1.$$

Exercice 3

Question 5

On peut déjà établir la convergence des séries proposées soit par application de la règle de d'Alembert, soit plus simplement par comparaison à une série exponentielle en écrivant par exemple :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \frac{4^n}{(2n)!} \leqslant \frac{4^n}{n!}.$$

On peut donc poser

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad T = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

On observe alors (travailler d'abord sur les sommes partielles pour une justification rigoureuse) que

$$S+T=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2^m}{m!}=\mathbf{e}^2$$

et de même

$$S-T=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}}{(2n)!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{2^m}{m!}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-2)^m}{m!}=\mathbf{e}^{-2}.$$

Ces deux relations constituent un système linéaire d'inconnue (S,T), dont la résolution immédiate conduit à :

$$S=\frac{\mathbf{e}^2+\mathbf{e}^{-2}}{2}\qquad\text{et}\qquad T=\frac{\mathbf{e}^2-\mathbf{e}^{-2}}{2}.$$

Exercice 3

Question 6

Puisque $\cos\mathbf{e}^{-n}>0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, la série

$$\sum\ln\frac{\cos\mathbf{e}^{-n-1}}{\cos\mathbf{e}^{-n}}=\sum\big(\ln(\cos\mathbf{e}^{-(n+1)})-\ln(\cos\mathbf{e}^{-n})\big)$$

est télescopique convergente car la suite de terme général $\ln(\cos\mathbf{e}^{-n})$, $n\in\mathbb{N}$, est convergente. On a de plus :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\ln\frac{\cos\mathbf{e}^{-n-1}}{\cos\mathbf{e}^{-n}}=\lim_{n\to\infty}\ln(\cos\mathbf{e}^{-n})-\ln(\cos 1)=-\ln(\cos 1).$$

Exercice 4

On a :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad 0\leqslant v_n-u_n\leqslant w_n-u_n$$

d'où la convergence de la série $\sum v_n-u_n$ par comparaison à la série $\sum w_n-u_n$, convergente par hypothèse.

Mais puisque la série $\sum u_n$ converge, la série $\sum v_n$ est de même nature que la série $\sum v_n-u_n$; elle est donc convergente.

Exercice 5

Comme la série $\sum u_n$ converge, la suite (u_n) converge vers 0. Il en résulte que $u_n^2=o(u_n)$ d'où, par positivité de u_n (et u_n^2), la convergence de la série $\sum u_n^2$.

Exercice 6

D'après l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad 0\leqslant\sqrt{u_nu_{2n}}\leqslant\frac{u_n+u_{2n}}{2}.$$

En admettant provisoirement la convergence de la série $\sum u_{2n}$, on en déduit donc la convergence de la série $\sum\sqrt{u_nu_{2n}}$ par comparaison aux séries convergentes $\sum u_n$ et $\sum u_{2n}$.

On est donc ramené à établir la convergence de la série $\sum u_{2n}$. Or

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad\sum_{k=0}^{n}u_{2k}\leqslant\sum_{k=0}^{2n}u_k\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}u_k=M$$

par positivité et convergence de la série $\sum u_n$. Ainsi la suite des sommes partielles de la série $\sum u_{2n}$ est majorée, et comme cette série est à termes positifs, cela suffit pour assurer sa convergence.

Exercice 7

On a :

$$\forall n\geqslant 1,\quad\ln u_n=\sum_{k=1}^{n}\ln\Big(1+\frac{1}{k^2}\Big)$$

et $(\ln u_n)$ est donc la suite des sommes partielles de la série de terme général

$$x_n=\ln\Big(1+\frac{1}{n^2}\Big),\quad n\geqslant 1.$$

Comme

$$x_n\sim\frac{1}{n^2}\geqslant 0,$$

la série $\sum x_n$ est convergente par comparaison aux séries de Riemann. La suite $(\ln u_n)$ de ses sommes partielles est donc convergente, d'où l'on déduit que la suite de terme général $u_n=\mathbf{e}^{\ln u_n}$ converge.

Exercice 8

On pose :

$$\forall n\geqslant 2,\quad u_n=\frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}.$$

Pour $\gamma\neq\alpha$, les théorèmes de croissances comparées donnent :

$$\lim_{n\to\infty}n^\gamma u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha-\gamma}(\ln n)^\beta}=\begin{cases}0 & \text{si }\alpha>\gamma\\ +\infty & \text{si }\alpha<\gamma\end{cases}.$$

Le cas $\gamma=\alpha$ se divise à son tour en trois sous-cas :

$$\lim_{n\to\infty}n^\alpha u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(\ln n)^\beta}=\begin{cases}0 & \text{si }\beta>0\\ 1 & \text{si }\beta=0\\ +\infty & \text{si }\beta<0\end{cases}.$$

- Si $\alpha<1$, le calcul préliminaire appliqué à $\gamma=1$ montre que
$$0\leqslant\frac{1}{n}=o\Big(\frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}\Big),$$
d'où l'on déduit la divergence de la série $\sum u_n$ par comparaison à la série harmonique, divergente.
- Si $\alpha>1$, alors on peut choisir γ réel tel que $1<\gamma<\alpha$. Puisque $\gamma<\alpha$, le calcul préliminaire assure que
$$0\leqslant\frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}=o\Big(\frac{1}{n^\gamma}\Big),$$
d'où l'on tire la convergence de la série $\sum u_n$ par comparaison à la série de Riemann $\sum 1/n^\gamma$, convergente puisque $\gamma>1$.
- Si $\alpha=1$, une comparaison à une série de Riemann ne permet pas de déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 10

Question 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leqslant 0$ et la suite (u_n) est donc décroissante. Par ailleurs son premier terme appartient à l'intervalle $]0, 1[$, stable par $f : x \longmapsto x(1-x)$: plus précisément,

$$\forall x \in [0,1], \quad 0 \leqslant x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}.$$

Par conséquent, la suite est à termes dans l'intervalle $]0, 1[$; elle est donc minorée. Décroissante et minorée, elle est donc convergente.
En passant à la limite dans la relation de récurrence, on montre que sa limite ℓ vérifie $\ell = \ell - \ell^2$, c'est-à-dire $\ell = 0$. Ainsi la suite (u_n) converge vers 0.

Exercice 10

Question 2

La série $\sum u_n^2 = \sum(u_n - u_{n+1})$ est télescopique convergente, étant donné que la suite (u_n) converge d'après **1.**.

Exercice 10

Question 3

La série $\sum \ln \frac{u_{n+1}}{u_n} = \sum(\ln u_{n+1} - \ln u_n)$ est également télescopique, mais divergente puisque la suite $(\ln u_n)$ diverge vers $-\infty$ d'après **1.**.

Par ailleurs, puisque $u_n \to 0$,

$$\ln \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ln(1 - u_n) \sim -u_n \leqslant 0.$$

On en déduit par comparaison que $\sum u_n$ est de même nature que $\sum \ln \frac{u_{n+1}}{u_n}$, c'est-à-dire divergente.

Exercice 12

Question 1

Il vient :

$$\begin{aligned} v_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) &= \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim -\frac{1}{2n^2} \leqslant 0. \end{aligned}$$

On en déduit la convergence de la série $\sum v_n$ par comparaison à la série de Riemann convergente $-\frac{1}{2}\sum \frac{1}{n^2}$.

Exercice 12

Question 2

Par théorème, la suite (u_n) converge si, et seulement si, la série télescopique associée $\sum u_{n+1} - u_n$ converge.
Dans le cas étudié, la suite (u_n) est donc convergente d'après la question **1.**. Il existe donc $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \to \gamma$, i.e. $u_n = \gamma + o(1)$ ou encore

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1).$$

Exercice 13

Question 1

Il vient :

$$\begin{aligned} u_n &= \ln \frac{x_{n+1}}{q^{n+1}(n+1)^\beta} - \ln \frac{x_n}{x^n n^\beta} = \ln \frac{x_{n+1}}{x_n} - \ln q - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^\beta \\ &= \ln\left(1 + \frac{\alpha}{qn} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \beta \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\ &= \left(\frac{\alpha}{qn} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \beta\left(\frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \left(\frac{\alpha}{q} - \beta\right)\frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Pour $\beta = \frac{\alpha}{q}$, la série $\sum u_n$ est donc absolument convergente par comparaison à la série de Riemann convergente $\sum 1/n^2$.

Exercice 13

Question 2

Pour le choix de $\beta = \frac{\alpha}{q}$, la série télescopique $\sum y_{n+1} - y_n$ est convergente d'après **1.**, si bien que la suite (y_n) est convergente. En notant ℓ sa limite, la suite de terme général

$$\mathbf{e}^{y_n} = \frac{x_n}{q^n n^\beta}, \quad n \geqslant 1,$$

converge vers $C = \mathbf{e}^\ell > 0$, ce qui signifie que :

$$x_n \sim C q^n n^{\alpha/q}, \quad n \to \infty.$$

Exercice 14

Soient $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ celle de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{u_n}{n}$. En posant $S_0 = 0$, on a :

$$\begin{aligned} \forall n \geqslant 1, \quad T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k - S_{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{S_{k-1}}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{S_k}{k+1} = \sum_{k=1}^{n-1} S_k\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \frac{S_n}{n}. \end{aligned} \qquad (*)$$

Comme la série $\sum u_n$ converge, la suite (S_n) est elle aussi convergente et par suite bornée : soit M réel tel que pour tout $n \geqslant 1$, $|S_n| \leqslant M$. Au membre de droite de la formule $(*)$, on a donc :

- le quotient $\frac{S_n}{n}$ qui tend vers 0 lorsque $n \to \infty$;
- la somme
$$X_n = \sum_{k=1}^{n-1} S_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$
qui apparaît comme une somme partielle de la série de terme général
$$x_n = S_n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right), \qquad n \geqslant 1.$$
Or :
$$\forall n \geqslant 1, \quad |x_n| \leqslant M\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$
d'où l'on déduit la convergence de la série $\sum x_n$ par comparaison à la série télescopique $\sum\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$, convergente puisque la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ converge. La suite (X_n) est donc convergente.

La suite (T_n) est donc convergente, ce qui établit la convergence de la série $\sum \frac{u_n}{n}$.

Exercice 15

Question 1.a

On s'assure tout d'abord de la bonne définition des restes : par hypothèse, la série $\sum v_n$ converge d'où l'on déduit, puisque $u_n = o(v_n \geqslant 0)$, que la série $\sum u_n$ converge absolument donc converge. Les restes de ces deux séries convergentes sont donc bien définis.
Pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall n \geqslant N, \qquad |u_n| \leqslant \varepsilon v_n.$$
Dès lors,
$$\forall n \geqslant N, \qquad |U_n| = \left|\sum_{k=n}^{\infty} u_k\right| \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} |u_k| \leqslant \varepsilon \sum_{k=n}^{\infty} v_k = \varepsilon V_n.$$
Ceci établit que $U_n = o(V_n)$.

Exercice 15

Question 1.b

De même, $u_n \sim v_n \geqslant 0$ avec $\sum v_n$ convergente entraîne que $\sum u_n$ converge, ce qui explique la bonne définition des restes. L'hypothèse $u_n \sim v_n$ s'écrit $u_n - v_n = o(v_n)$. Par application du résultat démontré en **a.**, on en déduit que $U_n - V_n = o(V_n)$, soit $U_n \sim V_n$.

Exercice 15

Question 2.a

On a
$$0 \leqslant \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n(n+1)}, \qquad n \to \infty$$
d'où d'après **1.b.**, puisque la série de Riemann $\sum 1/n^2$ converge,
$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sim \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{n}, \qquad n \to \infty.$$

Exercice 15

Question 2.b

D'après la formule de Stirling
$$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln\sqrt{2\pi}.$$
On a par ailleurs, d'après un développement limité à l'ordre 3 du ln,
$$u_n = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim -\frac{1}{12n^2} \leqslant 0, \qquad n \to \infty,$$
d'où, d'après **1.b.** puisque la série de Riemann $\sum 1/n^2$ converge,
$$\ln\sqrt{2\pi} - a_n = \sum_{k=n}^{\infty} u_k \sim -\frac{1}{12}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^2} \sim -\frac{1}{12n}, \qquad n \to \infty.$$
Par suite,
$$a_n = \ln\sqrt{2\pi} + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \qquad n \to \infty.$$

Exercice 15

Question 2.c

D'après **b.**,
$$\begin{aligned} n! &= \frac{n^{n+1/2}}{e^n}\exp\left(\ln\sqrt{2\pi} + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \sqrt{2\pi}\,\frac{n^{n+1/2}}{e^n}\left(1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right), \qquad n \to \infty. \end{aligned}$$

Exercice 16

Question 1

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, il vient :
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\int_0^1 t^{k-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{n}(-t)^{k-1}\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{1-(-t)^n}{1-(-t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t \\ &= \ln 2 + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Exercice 16

Question 2

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\left|(-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t\right| = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$
d'où l'on déduit par encadrement que
$$\lim_{n\to\infty} (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t = 0.$$
Il en résulte d'après **1.** la convergence et la valeur de la série suivante :
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2.$$

Remarque.

Attention, étant donné une suite de fonctions (f_n) sur un segment $[a, b]$, on n'a pas en général :

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(t)\right)\mathrm{d}t,$$

même si les limites existent !

Le vérifier sur le contre-exemple (simple !) $f_n : x \in [0, 1] \longmapsto nx^{n-1}$, $n \geqslant 1$.

Exercice 17

Question 1

Puisque $-x^2 \neq 1$, on a par sommation des premiers termes d'une suite géométrique :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k} = \sum_{k=0}^{n}(-x^2)^k = \frac{1-(-x^2)^{n+1}}{1-(-x^2)}$$

d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k} - \frac{1}{1+x^2} = (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}.$$

Exercice 17

Question 2

D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} - \arctan x\right| &= \left|\int_0^x \left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k} - \frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \int_0^x \left|\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k} - \frac{1}{1+t^2}\right|\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_0^x t^{2n+2}\,\mathrm{d}t = \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.\end{aligned}$$

Il en résulte par encadrement que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \arctan x.$$

Ainsi la série ci-dessous converge et :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan x.$$

Remarques.

En intégrant entre x et 0 dans la question **2.**, on pourrait justifier que la formule est encore valable pour $x \in [-1, 0]$.

Sur le même principe, on établirait que :

$$\forall x \in]-1, 1], \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}.$$

Exercice 18

Question 1

Pour tout $n \geqslant 1$, on considère la fonction

$$u_n : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{n(1+nx)}.$$

Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$u_n(x) \sim \frac{1}{x^2}\frac{1}{n^2} \geqslant 0,$$

d'où l'on déduit la convergence de la série $\sum u_n(x)$ par comparaison à la série de Riemann $\sum 1/n^2$. Ainsi $f(x)$ est bien défini pour $x \in \mathbb{R}^*$.
La fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}^*$.

Par parité des fonctions u_n, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f(-x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(-x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = f(x),$$

ce qui prouve que f est paire.

Exercice 18

Question 2

Pour $0 < x \leqslant y$, on a :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \frac{1}{n(1+nx^2)} \geqslant \frac{1}{n(1+ny^2)}$$

d'où en sommant, les deux séries étant convergentes :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(1+nx^2)} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(1+ny^2)} = f(y).$$

La fonction f est donc décroissante.

Exercice 18

Question 3.a

Pour $x_0 > 0$ donné et $x \in \left[\frac{x_0}{2}, \frac{3x_0}{2}\right]$, on a :

$$\begin{aligned}|f(x) - f(x_0)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_0^2 - x^2}{(1+nx_0^2)(1+nx^2)}\right| &= \left|x^2 - x_0^2\right| \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+nx_0^2)(1+nx^2)} \\ &\leqslant |x - x_0|\,(x + x_0)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+nx_0^2)(1+n\frac{x_0^2}{4})} \leqslant \kappa\,|x - x_0|\end{aligned}$$

où

$$\kappa = \frac{5x_0}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+nx_0^2)(1+n\frac{x_0^2}{4})}$$

est bien défini comme somme d'une série convergente par comparaison aux séries de Riemann.

Exercice 18

Question 3.b

Pour $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$, l'inégalité de la question **a.** implique que $f(x) \to f(x_0)$ lorsque $x \to x_0$, ce qui établit la continuité de f en x_0.
Ainsi f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ puis, par parité, sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 18

Question 4.a

La fonction f étant décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, elle admet des limites en 0 et en $+\infty$ en vertu du théorème de la limite monotone :

- en $+\infty$: une limite finie car f est minorée par 0 ;
- en 0 à droite : une limite finie si f est majorée, $+\infty$ sinon.

Exercice 18

Question 4.b

On a tout d'abord, toutes séries convergentes :

$$\forall x > 0, \quad 0 \leqslant f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{1+nx^2} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{nx^2} = \frac{C}{x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

où

$$C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

d'où l'on déduit par encadrement que :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

Par ailleurs, pour $x > 0$ donné, on a :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+nx^2)} \geqslant \sum_{1\leqslant n\leqslant \frac{1}{x^2}} \frac{1}{n(1+nx^2)} \geqslant \sum_{1\leqslant n\leqslant \frac{1}{x^2}} \frac{1}{2n} \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$$

par composition des limites, étant donné que la suite des sommes partielles de la série harmonique diverge vers $+\infty$. Il en résulte que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty.$$