

Suites et fonctions d'une variable

Feuille d'exercices

1 Étudier la convergence, lorsque $n \rightarrow \infty$, de :

1. $\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n [kx]$ ($x \in \mathbb{R}$);
2. $\frac{3n^2 - \sin n}{2(n+5)^2 \cos(n\pi/7)}$;
3. $\left(\left(\frac{\ln(x+n)}{\ln n} \right)^n - 1 \right) \ln n$ ($x \in \mathbb{R}$);
4. $\left(e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right)^{\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1}}$.

2 Caractériser la convergence d'une suite d'entiers relatifs.

3 1. Démontrer le théorème de Cesàro : si une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ , alors la suite de terme général

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k, \quad n \geq 1,$$

converge également vers ℓ . La réciproque est-elle vraie ?

2. En déduire le lemme de l'escalier : si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} - u_n = \ell \in \mathbb{R} \quad \implies \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{n} = \ell.$$

3. a. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs. Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in \mathbb{R}_+ \quad \implies \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell.$$

b. En déduire les limites, lorsque $n \rightarrow \infty$, de

$$\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}, \quad \frac{1}{n} \sqrt[n]{n(n+1) \cdots (n+n)}, \quad \frac{1}{n^2} \sqrt[n]{\frac{(3n)!}{n!}}.$$

4 Soient a et b deux réels strictement positifs.

1. Montrer que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par les conditions initiales $a_0 = a$ et $b_0 = b$ ainsi que les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

convergent vers la même limite. Leur limite commune est appelée moyenne arithmético-géométrique des réels strictement positifs a et b .

2. Écrire un algorithme permettant de calculer une valeur approchée à la précision 10^{-n} de la moyenne arithmético-géométrique de a et b .

5 Étudier les suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de conditions initiales $u_0 > 0$ et $u_1 > 0$ définies par la relation de récurrence $u_{n+2} = \sqrt{u_n u_{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6 Étudier les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par leur condition initiale et la relation de récurrence (valable pour tout $n \in \mathbb{N}$) précisées :

1. $u_0 \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $u_{n+1} = \frac{1+u_n}{1-u_n}$;
2. $u_0 > -\frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \ln(1+2u_n)$;
3. $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \cos u_n$;
4. $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}(4-u_n^2)$;
5. $u_0 > 1$ et $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n^2 - 1}$;
6. $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{u_n}$.

7 Soient $a \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle telle que $u_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}(a - u_n^2).$$

1. Étudier les variations et les points fixes de la fonction $f : x \mapsto x + \frac{1}{2}(a - x^2)$.
2. Quel est le comportement de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque $a < 0$? $a = 0$? $a = 4$?
3. On suppose $0 < a < 4$.

- a. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\frac{a}{2} \leq u_n \leq 2$.
- b. Montrer que :

$$\forall n \geq 1, \quad |u_{n+1} - \sqrt{a}| \leq M |u_n - \sqrt{a}| \quad \text{où } M = \max\left(\frac{\sqrt{a}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{a}}{2} - \frac{a}{4}\right).$$

- c. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

4. On suppose $a > 4$.

- a. Quelles sont les limites éventuelles de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
- b. Justifier que si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ , alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N, \quad |u_{n+1} - \ell| \geq \frac{\sqrt{a}}{2} |u_n - \ell|.$$

c. Conclusion ?

8 1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x^n + x = 1$ d'inconnue $x \in [0, 1]$ admet une unique solution que l'on note x_n .

2. Étudier la monotonie et la convergence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, préciser sa limite.

3. On pose $y_n = 1 - x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- a. Montrer que $\ln y_n \sim -ny_n$ et en déduire que $\ln y_n \sim -\ln n$.
- b. En déduire un équivalent de y_n puis un développement asymptotique de x_n .

9 1. Montrer que pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ donné, l'équation $x + x^2 + \cdots + x^n = 1$ d'inconnue $x \in]0, 1[$ admet une unique solution notée x_n .

2. Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ est convergente. On note ℓ sa limite.

3. Calculer de deux façons la limite de $(x_n^{n+1})_{n \geq 2}$ et en déduire la valeur de ℓ .

4. Déterminer la limite de la suite de terme général $(2x_n)^{n+1}$, $n \geq 2$, et en déduire un développement asymptotique de x_n lorsque $n \rightarrow \infty$ de la forme $x_n = a + b\gamma^n + o(\gamma^n)$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $\gamma \in]0, 1[$ à expliciter.

10 Démontrer que la fonction $\sin n$ n'admet pas de limite en $+\infty$.

11 Étudier les variations de chacune des fonctions suivantes et en esquisser le graphe puis préciser si elles sont injectives, surjectives et bijectives (on donnera une justification graphique puis analytique) :

1. $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \ln(e^x - x) - 1$;
2. $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto x - \frac{1}{x}$;
3. $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{2}e^{2x} - e^{-x}$;
4. $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3 - 3x + 1$.

12 Soient f et g deux fonctions continues sur $[0, 1]$, à valeurs dans $[0, 1]$, telles que $f \circ g = g \circ f$.

♣ On désire montrer qu'il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $f(x_0) = g(x_0)$. On raisonne pour cela par l'absurde : on suppose qu'un tel point n'existe pas. On note $f, f^2, \dots, f^n, \dots$ les itérés de f et de même $g, g^2, \dots, g^n, \dots$ ceux de g .

1. Justifier que, quitte à permuter f et g , il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in [0, 1]$, $g(x) \geq f(x) + \varepsilon$.
2. Montrer que, pour tous $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $g^n(x) \geq f^n(x) + n\varepsilon$.
3. Conclure.

13 Établir les inégalités :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x.$$

14 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ par $f : x \mapsto (\ln x)/(x - 1)$.

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ puis que f est prolongeable par continuité en 1. On notera encore f le prolongement de f à \mathbb{R}_+^* .
2. Justifier que f est dérivable en 1 :
 - a. à l'aide d'un développement limité ;
 - b. en étudiant la limite de $f'(x)$ lorsque $x \rightarrow 1$.

15 Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 , majorée et à dérivée croissante. Montrer que f est décroissante.

16 Pour $n \in \mathbb{N}$ donné, on pose :

$$P_n = \frac{1}{2^n n!} \left((X^2 - 1)^n \right)^{(n)}.$$

1. Montrer que P_n est un polynôme de degré n , pair ou impair selon la parité de n .
2. Montrer que $P_n(1) = 1$ et en déduire la valeur de $P_n(-1)$.
3. Montrer que P_n admet n racines deux-à-deux distinctes dans l'intervalle $] -1, 1[$.

17 On définit la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des intégrales de Wallis par la formule :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \, dt.$$

1. Calculer I_0, I_1 et I_2 et montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t \, dt.$$

2. Pour $n \geq 2$, établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2} .

3. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et en déduire que $I_n \sim I_{n-1}$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

4. Montrer que la suite $(nI_n I_{n-1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est constante ; calculer sa valeur. En déduire un équivalent de I_n en fonction de n .

5. Pour $p \in \mathbb{N}$, exprimer I_{2p} et I_{2p+1} à l'aide de factorielles et établir la formule de Wallis :

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{(2p)!!}{(2p-1)!! \sqrt{2p+1}},$$

où l'on a noté, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$:

$$(2q)!! = (2q) \times (2q-2) \times \dots \times 4 \times 2 \quad \text{et} \quad (2q+1)!! = (2q+1) \times (2q-1) \times \dots \times 3 \times 1.$$

18 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction T-périodique continue telle que $\int_0^T f(t) \, dt = 0$.

1. Justifier que f admet une primitive T-périodique.
2. En déduire que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(\lambda t) \, dt = 0.$$

19 On va démontrer dans cet exercice que le nombre réel e est irrationnel. Pour cela, on raisonne par l'absurde : on suppose que $e \in \mathbb{Q}$.

1. Montrer, à l'aide d'une formule de Taylor, que pour $n \in \mathbb{N}$ assez grand, l'intégrale

$$I_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t \, dt$$

est alors un entier relatif.

2. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
3. Conclure.

20 En utilisant une formule de Taylor, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

21 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 . Pour $a \in \mathbb{R}$, déterminer

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}.$$

22 Déterminer la limite des fonctions suivantes au point considéré :

- | | |
|--|--|
| 1. $x \mapsto \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x, \quad x \rightarrow +\infty;$ | 4. $x \mapsto x \ln(\ln(1+x)), \quad x \rightarrow 0;$ |
| 2. $x \mapsto \frac{\sqrt[3]{x^2+1} + x}{5 + \sqrt{3x^2 - x + 2}}, \quad x \rightarrow +\infty;$ | 5. $x \mapsto (2e^{\sin x} - \cos x)^{\cotan x}, \quad x \rightarrow 0;$ |
| 3. $x \mapsto \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}, \quad x \rightarrow 0 \quad (b \neq 0);$ | 6. $x \mapsto x \left(\left(1 + \frac{2}{x}\right)^x - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x} \right), \quad x \rightarrow +\infty.$ |

23 Déterminer le développement limité des fonctions suivantes à l'ordre et voisinage du point indiqués :

- | | |
|--|---|
| 1. $DL_2(0) : x \mapsto \ln(2 \cos x + \sin x);$ | 4. $DL_3(\pi/4) : x \mapsto \tan x;$ |
| 2. $DL_2(0) : x \mapsto e^{\sqrt{1+x}};$ | 5. $DL_2(1) : x \mapsto \frac{e}{e^x - e} - \frac{1}{x-1}.$ |
| 3. $DL_4(0) : x \mapsto \tan x;$ | |

Indications

- 1** 1. La partie entière $\lfloor x \rfloor$ d'un réel x est par définition le plus grand entier inférieur ou égal à x ; elle est donc caractérisée par les conditions $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ et $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$. En renversant ces inégalités, obtenir un encadrement de $\lfloor x \rfloor$.
2. Trouver un équivalent du numérateur et du dénominateur puis montrer que la convergence de cette suite équivaut à celle de la suite de terme général $\cos(n\pi/7)$, $n \in \mathbb{N}$.
3. Trouver un équivalent de chaque parenthèse.
4. Trouver un équivalent de la parenthèse et de l'exposant.
- 2** Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$. Intuitivement, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente si, et seulement si, elle est stationnaire, i.e. constante à partir d'un certain rang. Un sens est évident. Pour l'autre, observer que si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, alors $(u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0; le recours aux ε permet alors de conclure.
- 3** 1. Commencer par traiter le cas $\ell = 0$. Pour $\varepsilon > 0$ donné, soit $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $|u_n| \leq \varepsilon/2$. Justifier l'inégalité
- $$\forall n \geq N, \quad |v_n| \leq \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^{N-1} u_k \right| + \frac{1}{n} \sum_{k=N}^n |u_k|$$
- et en déduire l'existence de $N' \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|v_n| \leq \varepsilon$. Traiter ensuite le cas $\ell \in \mathbb{R}$ en considérant la suite de terme général $u_n - \ell$, $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Appliquer le résultat de la question 1. à la suite de terme général $u_{n+1} - u_n$, $n \in \mathbb{N}^*$.
3. a. Si $\ell > 0$, appliquer le résultat de la question 2. à la suite de terme général $\ln u_n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Si $\ell = 0$, se livrer à de nouvelles epsiloneries.
- b. Pour chacune des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ proposées, appliquer le résultat de la question 3.a. à la suite de terme général $v_n = u_n^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.
- 4** 1. Comment établir la convergence d'une suite sans connaître à l'avance la valeur de sa limite? On utilisera l'inégalité arithmético-géométrique (à retenir!): pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt{xy} \leq (x+y)/2$; démonstration: développer $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$.
2. Remarquer que les suites $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$ sont adjacentes.
- 5** Étudier la suite de terme général $\ln u_n$, $n \in \mathbb{N}$, de façon à transformer la relation de récurrence donnée en une relation de récurrence linéaire.
- 6** 2. La fonction f sous-jacente est croissante, de sorte que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone. L'étude des points fixes de f fait apparaître deux intervalles stables; distinguer selon que u_0 appartient à l'un ou l'autre.
3. $[0, 1]$ est un intervalle stable. Étudier les deux suites extraites principales ou appliquer l'inégalité des accroissements finis pour montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
5. $]1, +\infty[$ est un intervalle stable. Étudier les deux suites extraites principales pour montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge de seconde espèce.

- 8** 1. Considérer la fonction $f_n : x \mapsto x^n + x$.
2. Comparer $f_{n+1}(x_n)$ et $f_{n+1}(x_{n+1})$.
3. a. Justifier qu'on peut composer le premier équivalent par \ln .
- 9** 1. Étudier la fonction $f_n : x \mapsto x + x^2 + \dots + x^n$.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante; pour comparer x_n et x_{n+1} , considérer $f_n(x_n)$ et $f_n(x_{n+1})$.
3. Utiliser la décroissance de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ puis exprimer x_n^{n+1} en fonction de x_n (sans puissance).
4. À l'aide d'un équivalent, montrer que la suite de terme général $\ln((2x_n)^{n+1})$ converge vers 0. En déduire un équivalent de x_n^{n+1} puis de $x_n - \ell$.
- 10** Utiliser la caractérisation séquentielle.
- 12** 1. Commencer par montrer que la fonction $g - f$ est d'un signe strict constant, qu'on peut supposer positif (quitte à permuter f et g). Améliorer ensuite l'inégalité $g - f > 0$ en $g - f \geq \varepsilon$.
2. Raisonner par récurrence.
- 13** La fonction \sin est concave sur $[0, \pi/2]$.
- 14** 2. b. Utiliser le théorème des accroissements finis pour relier le taux d'accroissement à la dérivée.
- 15** Raisonner par l'absurde. Justifier que si f n'était pas décroissante, il existerait deux réels $x_0 \geq 0$ et $m > 0$ tels que pour tout $x \geq x_0$, $f'(x) \geq m$ et aboutir à une contradiction.
- 16** 3. Appliquer le théorème de Rolle n fois au polynôme $(X^2 - 1)^n$. Plus précisément, montrer par récurrence sur $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ que $((X^2 - 1)^n)^{(k)}$ admet 1 et -1 pour racines de multiplicités $n - k$ et k autres racines deux-à-deux distinctes dans l'intervalle $] -1, 1[$.
- 17** 1. Pour I_2 , linéariser $\cos^2 t$. Pour la nouvelle expression de I_n , utiliser un changement de variable affine transformant sinus en cosinus et préservant l'intervalle d'intégration $[0, \pi/2]$.
2. Utiliser une intégration par parties. Écrire $\sin^n t = (\sin^{n-1} t)(\sin t)$.
3. En utilisant la décroissance de $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et la question 2., encadrer le quotient I_{n-1}/I_n par deux suites convergeant vers 1.
5. Conjecturer une expression et l'établir par récurrence ou utiliser un produit télescopique :

$$I_{2p} = I_0 \prod_{k=1}^p \frac{I_{2k}}{I_{2k-2}}, \quad I_{2p+1} = I_1 \prod_{k=1}^p \frac{I_{2k+1}}{I_{2k-1}}.$$

- 18** 1. L'intégrale d'une fonction T -périodique sur un segment de longueur T est indépendante du choix du segment d'intégration.
2. Justifier que les primitives de f sont bornées.
- 19** 1. Appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction exponentielle sur le segment $[0, 1]$.
2. Utiliser un encadrement.
3. Justifier que $I_n = 0$ pour n assez grand et en déduire une contradiction.
- 20** À $x \in \mathbb{R}$ fixé, appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction exponentielle sur le segment $[0, x]$.
- 21** Utiliser une formule de Taylor.
- 22** Utiliser (à bon escient) équivalents et développements limités.