Travaux dirigés

Suites et fonctions d'une variable

ECS2 – Lycée La Bruyère, Versailles

Année 2017/2018

Exercice 1

Traité en classe.

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers qui converge vers ℓ. On cherche à montrer que (u_n) est stationnaire, i.e. constante à partir d'un certain rang.

Par définition de la limite,

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists N\in\mathbb{N},\quad \forall n\geqslant N,\quad |u_n-\ell|\leqslant\varepsilon.$$

Si $\ell\in\mathbb{Z}$, alors en prenant $\varepsilon=\frac{1}{3}$, on obtient $|u_n-\ell|\in\mathbb{Z}\cap\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]=\{0\}$ et donc $u_n=\ell$ pour tout $n\geqslant N$.

Dans le cas général, toujours pour $\varepsilon=\frac{1}{3}$, on obtient pour $n\geqslant N$:

$$|u_n-u_N|=|(u_n-\ell)-(u_N-\ell)|\leqslant|u_n-\ell|+|u_N-\ell|\leqslant 2\varepsilon<1$$

donc $u_n=u_N$ et la suite (u_n) est stationnaire.

On peut en fait traiter le cas général avec la première méthode car, même si ℓ n'est pas réputé entier, l'intervalle $\left[\ell-\frac{1}{3},\ell+\frac{1}{3}\right]$, de longueur $\frac{2}{3}<1$, ne contient au plus qu'un entier. Comme il contient tous les entiers u_n, $n\geqslant N$, ceux-ci sont nécessairement égaux.

La réciproque étant évidente, on peut donc énoncer : une suite d'entiers est convergente si, et seulement si, elle est stationnaire.

Exercice 3

Question 1

On suppose dans un premier temps que $\ell=0$. Soit $\varepsilon>0$. Puisque (u_n) tend vers 0, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que : $\forall n\geqslant N$, $|u_n|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$.
On a alors, pour $n\geqslant N$:

$$\begin{aligned}|v_n|&=\frac{1}{n}\Big|\sum_{k=1}^{N-1}u_k+\sum_{k=N}^{n}u_k\Big|\leqslant\frac{1}{n}\Big|\sum_{k=1}^{N-1}u_k\Big|+\frac{1}{n}\Big|\sum_{k=N}^{n}u_k\Big|\\&\leqslant\frac{1}{n}\Big|\sum_{k=1}^{N-1}u_k\Big|+\frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n}|u_k|\leqslant\frac{1}{n}\Big|\sum_{k=1}^{N-1}u_k\Big|+\frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n}\frac{\varepsilon}{2}\\&\leqslant\frac{1}{n}\Big|\sum_{k=1}^{N-1}u_k\Big|+\frac{n-N+1}{n}\frac{\varepsilon}{2}\leqslant\frac{1}{n}\Big|\sum_{k=1}^{N-1}u_k\Big|+\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Comme $K=\left|\sum_{k=1}^{N-1}u_k\right|$ est une constante (par rapport à n), le membre de droite dans l'inégalité

$$\forall n\geqslant N,\quad |v_n|\leqslant\frac{K}{n}+\frac{\varepsilon}{2}$$

converge vers $\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$ lorsque $n\to\infty$. Il existe donc $N'\geqslant N$ tel que :

$$\forall n\geqslant N',\quad |v_n|\leqslant\frac{K}{n}+\frac{\varepsilon}{2}\leqslant\varepsilon.$$

Ceci établit la convergence de (v_n) vers $\ell=0$.

Le cas général s'en déduit : si (u_n) converge vers ℓ, alors $(u_n-\ell)$ converge vers 0 si bien, d'après le cas précédent, que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(u_k-\ell)=v_n-\ell\xrightarrow[n\to\infty]{}0,$$

ce qui signifie que (v_n) converge vers ℓ.

Exercice 3

Question 2

On suppose que $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers ℓ.
En appliquant le théorème de Césaro à la suite de terme général $x_n = u_{n+1} - u_n$, $n \in \mathbb{N}$, qui converge vers ℓ par hypothèse, on obtient que la suite de terme général

$$y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(u_{k+1} - u_k) = \frac{u_{n+1} - u_1}{n}$$

(somme téléscopique) converge vers ℓ.
Il en résulte que

$$\frac{u_n}{n} = \frac{(n-1)y_{n-1} + u_1}{n} = \frac{n-1}{n}y_{n-1} + \frac{u_1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell.$$

Exercice 3

Question 3.a

On suppose que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in \mathbb{R}_+^*.$$

Le lemme de l'escalier peut être appliqué à la suite de terme général $z_n = \ln u_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, car

$$z_{n+1} - z_n = \ln \frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln \ell.$$

On en déduit que :

$$\frac{z_n}{n} = \ln u_n^{1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln \ell.$$

Il en résulte par continuité de l'exponentielle que :

$$\sqrt[n]{u_n} = u_n^{1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbf{e}^{\ln \ell} = \ell.$$

Exercice 3

Question 3.b

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{n^n}{n!}.$$

On a :

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\,\frac{n!}{(n+1)!} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\
&= \exp\left\{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right\} = \exp\left\{n\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right\} \\
&= \exp(1 + o(1)) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbf{e}.
\end{aligned}$$

Il en résulte d'après **a.** que :

$$\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \sqrt[n]{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbf{e}.$$

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{n(n+1)\cdots(n+n)}{n^n}.$$

On a :

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)(n+2)\cdots(2n+2)}{n(n+1)\cdots(n+n)}\,\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \\
&= \frac{(2n+1)(2n+2)}{n}\,\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{2(2n+1)}{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \\
&\sim 4\exp\left\{-n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right\} = 4\exp\left\{-n\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right\} \\
&= 4\exp(-1 + o(1)) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{4}{\mathbf{e}}.
\end{aligned}$$

Il en résulte d'après **a.** que :

$$\frac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)\cdots(n+n)} = \sqrt[n]{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{4}{\mathbf{e}}.$$

Exercice 4

Question 1

Tout d'abord, on justifie par récurrence que les suites (a_n) et (b_n) sont bien définies et à termes strictement positifs.
On utilise le prédicat de récurrence $\mathcal{P}_N$: les suites sont bien définies jusqu'au rang N et à termes réels strictement positifs.

Pour étudier la monotonie des suites (a_n) et (b_n) on s'intéresse aux quantités :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+1} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2}$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{b_{n+1}}{b_n} = \sqrt{\frac{a_n}{b_n}}.$$

On est donc conduit à comparer, pour $n \geqslant 1$, les réels

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \quad \text{et} \quad b_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}.$$

On retiendra l'inégalité classique (dite inégalité *arithmético-géométrique*) :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \quad \sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2},$$

que l'on peut aussi utiliser sous la forme :

$$\forall u, v \in \mathbb{R}, \quad |uv| \leqslant \frac{u^2 + v^2}{2}.$$

On en déduit que $a_n \geqslant b_n$ pour tout $n \geqslant 1$. Ainsi la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$ croissante.

La suite (a_n) est par ailleurs minorée par 0, comme on l'a fait remarquer dès le départ. Quant à la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$, elle est majorée par a_1 par décroissance de $(a_n)_{n\geqslant 1}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n \leqslant a_n \leqslant a_1.$$

Dans ces conditions, les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes en vertu du théorème de la limite monotone. Soient α et β leurs limites respectives.

En passant aux limites (qui existent) dans la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2},$$

on obtient enfin :

$$\alpha = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

c'est-à-dire $\alpha = \beta$, d'où le résultat.

Exercice 4

Question 2

Il résulte de l'étude faite en **1.** que les suites $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes.
Ainsi, en notant ℓ leur limite commune,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n \leqslant \ell \leqslant b_n.$$

On en déduit que tout réel de l'intervalle $[a_n, b_n]$ constitue une valeur approchée de ℓ à la précision $\varepsilon > 0$ dès que $|b_n - a_n| \leqslant \varepsilon$ (plus finement, $\frac{a_n + b_n}{2}$ conviendra dès que $|b_n - a_n| \leqslant 2\varepsilon$).

D'ou le script Scilab ci-dessous :

```
// saisie des paramètres
a=input('Paramètre a : ')
b=input('Paramètre b : ')
n=input('Nombre de décimales : ')
// calcul des premiers termes de la suite
while (abs(b-a)>2*10^(-n))
    t=a
    a=(a+b)/2
    b=sqrt(t*b)
end
// affichage du résultat
disp((a+b)/2, 'Valeur approchée de la moyenne
                        arithmético-géométrique : ')
```


Exercice 5

Étant donnés deux réels $u_0 > 0$ et $u_1 > 0$ fixés, il existe une unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premiers termes u_0 et u_1 satisfaisant la relation de récurrence $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (une récurrence immédiate montre que u_n est bien défini et strictement positif pour tout $n \in \mathbb{N}$).
Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $v_n = \ln u_n$, $n \in \mathbb{N}$ (bien définie d'après la remarque précédente). La relation de récurrence sur $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ induit sur $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la relation de récurrence linéaire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 2v_{n+2} - v_{n+1} - v_n = 0.$$

Puisque le polynôme caractéristique $2X^2 - X - 1$ admet les deux racines simples 1 et $-\frac{1}{2}$, il existe donc deux réels α et β tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = \alpha + \beta\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

Le système linéaire de Cramer

$$\begin{cases} \alpha + \beta = v_0 \\ \alpha - \beta/2 = v_1 \end{cases}$$

se résoud en

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{3}(v_0 + 2v_1) \\ \beta = \frac{1}{3}(2v_0 - 2v_1) \end{cases},$$

ce qui conduit à :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \exp v_n = \sqrt[3]{u_0u_1^2}\exp\left\{\frac{2}{3}\left(\ln\frac{u_0}{u_1}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}.$$

On en déduit en particulier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt[3]{u_0u_1^2}$.

Exercice 8

Question 1

Pour $n \geqslant 1$ donné, la fonction $f_n : x \longmapsto x^n + x$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Elle réalise donc une bijection de $[0,1]$ sur $[f_n(0), f_n(1)] = [0,2]$. Il existe donc un unique réel $x_n \in [0,1]$ tel que $f_n(x_n) = 1$, c'est-à-dire $x_n^n + x_n = 1$.

Exercice 8

Question 2

Puisque $0 \leqslant x_n \leqslant 1$, on a $x_n^{n+1} \leqslant x_n^n$ d'où $x_n^{n+1} + x_n \leqslant x_n^n + x_n$, c'est-à-dire $f_{n+1}(x_n) \leqslant 1 = f_{n+1}(x_{n+1})$.
Compte-tenu de la stricte croissance de f_{n+1} sur $[0,1]$, on en déduit que $x_n \leqslant x_{n+1}$ et la suite (x_n) est donc croissante.

Étant par ailleurs majorée par 1, cette suite est donc convergente ; soit $\ell \in [0,1]$ sa limite.

Si $\ell < 1$ alors, par croissance de (x_n), on a $0 \leqslant x_n \leqslant \ell$ donc $0 \leqslant x_n^n \leqslant \ell^n$ pour tout $n \geqslant 1$ si bien que (x_n^n) converge vers 0 et

$$x_n = 1 - x_n^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \neq \ell,$$

ce qui est absurde.
Par conséquent, (x_n) converge vers $\ell = 1$.

Exercice 8

Question 3.a

Comme (x_n) converge vers 1,

$$\ln y_n = \ln(1 - x_n) = \ln x_n^n = n\ln x_n \sim n(x_n - 1) = -ny_n.$$

Cet équivalent peut être composé par ln car $-\ln y_n \to +\infty \neq 1$, si bien que :

$$\ln n + \ln y_n \sim \ln|\ln y_n| = o(\ln y_n)$$

d'où découle que :

$$\ln y_n = -\ln n + o(\ln y_n)$$

i.e.

$$\ln y_n \sim -\ln n.$$

Exercice 8

Question 3.b

Des deux équivalents de $\ln y_n$ obtenus en **a.**, on déduit que

$$y_n \sim \frac{\ln n}{n},$$

d'où l'on tire :

$$x_n = 1 - y_n = 1 - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

Exercice 9

Question 1

Pour $n \geqslant 2$ donné, la fonction $f_n : x \longmapsto x + x^2 + \cdots + x^n$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Elle réalise donc une bijection de $]0,1[$ sur $]f_n(0), f_n(1)[=]0,n[$. Il existe donc un unique réel $x_n \in]0,1[$ tel que $f_n(x_n) = 1$, c'est-à-dire

$$x_n + x_n^2 + \cdots + x_n^n = 1.$$

Exercice 9
Question 2

Pour $n \geqslant 2$, on a :

$$f_{n+1}(x_n) = x_n + x_n^2 + \cdots + x_n^n + x_n^{n+1} = f_n(x_n) + x_n^{n+1}$$
$$= 1 + x_n^{n+1} \geqslant 1 = f_{n+1}(x_{n+1}).$$

Comme la fonction f_{n+1} est strictement croissante sur $]0,1[$, on en déduit que $x_n \geqslant x_{n+1}$.
La suite (x_n) est ainsi décroissante. Étant par ailleurs minorée par 0, elle est convergente.

Exercice 9
Question 3

Soit $n \geqslant 2$. Par construction,

$$1 = \sum_{k=1}^{n} x_n^k = x_n \frac{1 - x_n^n}{1 - x_n}$$

d'où

$$1 - x_n = x_n - x_n^{n+1}.$$

Finalement,

$$x_n^{n+1} = 2x_n - 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 2\ell - 1.$$

Mais par ailleurs, la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante d'où :

$$\forall n \geqslant 2, \quad 0 \leqslant x_n^{n+1} \leqslant x_2^{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

puisque $0 \leqslant x_n \leqslant x_2 < 1$. On en déduit que (x_n^{n+1}) converge vers 0 et, par unicité de la limite, que $2\ell - 1 = 0$, c'est-à-dire $\ell = \frac{1}{2}$.

Exercice 9
Question 4

Puisque $2x_n \to 1$,

$$(n+1)\ln(2x_n) \sim n(2x_n - 1) = nx_n^{n+1} = \mathcal{O}(nx_2^n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Par suite,

$$(2x_n)^{n+1} = \mathbf{e}^{(n+1)\ln(2x_n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

d'où

$$x_n^{n+1} \sim \frac{1}{2^{n+1}}$$

c'est-à-dire

$$x_n^{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} + o\Big(\frac{1}{2^{n+1}}\Big).$$

Finalement,

$$x_n = \frac{1}{2}(1 + x_n^{n+1}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\frac{1}{2^n} + o\Big(\frac{1}{2^n}\Big), \quad n \to \infty.$$

Exercice 10

Les suites de termes généraux $x_n = 2n\pi$ et $y_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{N}$, tend vers $+\infty$ et pourtant

$$\sin x_n = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

et

$$\sin y_n = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

ont des limites distinctes. Cela exclut l'existence d'une limite pour la fonction sin en $+\infty$.

Exercice 12
Question 1

Par hypothèse, la fonction $g - f$ ne s'annule pas. Celle-ci étant continue sur l'intervalle $[0,1]$, le théorème des valeurs intermédiaires assure donc qu'elle garde un signe constant.
Quitte à permuter f et g, on peut donc supposer que $g(x) - f(x) > 0$ pour tout $x \in [0,1]$.

Par ailleurs, la fonction $g - f$ étant continue sur le segment $[0,1]$, elle y est minorée et atteint son minimum : il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que :

$$\forall x \in [0,1], \quad g(x) - f(x) \geqslant \varepsilon$$

où $\varepsilon = g(x_0) - f(x_0) > 0$ d'après ce qui précède.

Exercice 12
Question 2

On procède par récurrence sur $n \geqslant 1$ avec le prédicat :

$$\mathcal{P}_n : \qquad \text{« } \forall x \in [0,1], \quad g^n(x) \geqslant f^n(x) + n\varepsilon \text{ ».}$$

La propriété $\mathcal{P}_1$ est vraie d'après **1.**.
On suppose à présent la propriété $\mathcal{P}_n$ acquise pour un entier $n \geqslant 1$. On écrit alors, pour $x \in [0,1]$, en commutant f et g :

$$g^{n+1}(x) = g\big(g^n(x)\big) \geqslant f\big(g^n(x)\big) + \varepsilon = g^n\big(f(x)\big) + \varepsilon$$
$$\geqslant f^n\big(f(x)\big) + n\varepsilon + \varepsilon = f^{n+1}(x) + (n+1)\varepsilon$$

où la première inégalité résulte de $\mathcal{P}_1$ (appliquée à $g^n(x)$) et la seconde de $\mathcal{P}_n$ (appliquée à $f(x)$). Ainsi la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vérifiée.
D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est donc vraie pour tout $n \geqslant 1$, d'où le résultat.

Exercice 12
Question 3

Puisque f et g sont à valeurs dans $[0,1]$, on déduit de l'inégalité obtenue en **2.** que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 \geqslant g^n(x) \geqslant f^n(x) + n\varepsilon \geqslant n\varepsilon,$$

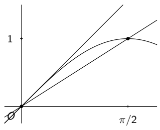
ce qui est bien sûr absurde ! D'où le résultat.

Exercice 13

On peut bien sûr faire l'étude de la fonction $\varphi : x \longmapsto \frac{\pi}{2}\sin x - x$: elle est croissante puis décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc prend des valeurs supérieures ou égales à $\varphi(0) = \varphi(\pi/2) = 0$.

Mais il est plus élégant de faire appel à des arguments de convexité. Puisque $\sin'' = -\sin$ est négatif sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, la fonction sin est concave sur cet intervalle. Sa courbe représentative se situe donc « au-dessus de ses cordes » et « en-dessous de ses tangentes ». En travaillant sur la tangente à l'origine et sur la corde reliant les points de coordonnées $(0, 0)$ et $(\pi/2, 1)$, on obtient l'inégalité classique :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \qquad \frac{2}{\pi}x \leqslant \sin x \leqslant x.$$



Exercice 14

Question 1

La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ par opérations sur les fonctions dérivables.

Puisque

$$f(x) = \frac{\ln x}{x-1} \sim \frac{x-1}{x-1} \sim 1 \to 1, \qquad x \to 1,$$

elle admet pour limite 1 au point 1. On peut donc la prolonger par continuité au point 1 en posant $f(1) = 1$.

Exercice 14

Question 2.a

Pour étudier $f(x)$ lorsque $x \to 1$, on pose $y = x - 1$, qui tend vers 0 lorsque $x \to 1$. On obtient le développement limité suivant :

$$f(x) = \frac{\ln(1+y)}{y} = \frac{y - y^2/2 + o(y^2)}{y} = 1 - \frac{y}{2} + o(y) = 1 - \frac{x-1}{2} + o(x-1)$$

lorsque $x \to 1$, $x \neq 1$. Puisque $f(1) = 1$ d'après **1.**, ce développement est encore valable lorsque $x \to 1$ (sans la restriction $x \neq 1$).
La fonction f, qui admet ainsi un développement limité du premier ordre au voisinage de 1, est donc dérivable en ce point avec $f'(1) = -\frac{1}{2}$.

Exercice 14

Question 2.b

En posant $y = x - 1$, qui tend vers 0 lorsque $x \to 1$, il vient :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x - 1 - x\ln x}{x(x-1)^2} = \frac{y - (1+y)\ln(1+y)}{y^2(1+y)} \\ &= \frac{y - (1+y)\big(y - y^2/2 + o(y^2)\big)}{y^2(1+y)} \\ &= \frac{-y^2/2 + o(y^2)}{y^2 + o(y^2)} \sim -\frac{y^2/2}{y^2} \to -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. La fonction f étant continue en 1 d'après **1.** donc sur $[1, x]$, et dérivable sur $]1, x[$, le théorème des accroissements finis assure l'existence d'un réel $c_x \in]1, x[$ tel que

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(c_x).$$

On justifie par encadrement que le réel c_x converge vers 1 lorsque $x \to 1$ si bien que, par composition des limites, le taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ tend vers $-\frac{1}{2}$ lorsque $x \to 1$. Ceci assure la dérivabilité de f en 1 avec $f'(1) = -\frac{1}{2}$.

Exercice 15

Il s'agit de montrer que $f'(x) \leqslant 0$ pour tout $x \geqslant 0$.

On raisonne par l'absurde : s'il existait $x_0 \geqslant 0$ tel que $f'(x_0) > 0$ alors, par croissance de f', on aurait

$$\forall x \geqslant x_0, \quad f'(x) \geqslant f'(x_0) = m > 0.$$

Mais alors :

$$\begin{aligned} \forall x \geqslant x_0, \quad f(x) &= f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\,\mathrm{d}t \\ &\geqslant f(x_0) + \int_{x_0}^{x} m\,\mathrm{d}t \\ &= f(x_0) + m(x - x_0) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty, \end{aligned}$$

en contradiction avec le caractère majoré de f.

La fonction f est donc décroissante.

Exercice 16

Question 1

On note D l'opérateur de dérivation des polynômes.

Le polynôme $U_n = (X^2 - 1)^n$ étant de degré $2n \geqslant n$, son polynôme dérivé n-ième est de degré $2n - n = n$ et il en va de même de P_n.

Puisque le polynôme dérivé d'un polynôme pair (resp. impair) est impair (resp. pair) et que $(X^2 - 1)^n$ est pair, le polynôme P_n est pair si n est pair et impair si n est impair. Bref, il a même parité que n.

Exercice 16

Question 2

La formule de Leibniz donne :

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{1}{2^n n!} D\big((X-1)^n (X+1)^n\big) \\ &= \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^k\big((X-1)^n\big) D^{n-k}\big((X+1)^n\big) \\ &= \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!}(X-1)^{n-k} \frac{n!}{k!}(X+1)^k \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (X-1)^{n-k}(X+1)^k. \end{aligned}$$

Dans cette formule, tous les termes de la somme s'annulent en 1 à l'exception de celui d'indice $k = n$, si bien que $P_n(1) = 1$. Par parité/imparité de P_n, on en déduit que $P_n(-1) = (-1)^n$.

Exercice 16
Question 3

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné, il suffit de démontrer par récurrence sur $k \in [\![0, n]\!]$ la propriété $\mathcal{P}_k$: « le polynôme $Q_k = D^k\big((X^2-1)^n\big)$ admet au moins k racines distinctes dans $]-1, 1[$ ».
La propriété est triviale pour $k = 0$... Si elle est acquise à un rang $k < n$, alors le polynôme Q_k admet au moins k racines $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$ dans l'intervalle $]-1, 1[$. Il admet également $x_0 = -1$ et $x_{k+1} = 1$ pour racines puisque -1 et 1 sont racines de $(X^2-1)^n$ de multiplicité $n > k$. On peut alors appliquer le théorème de Rolle à Q_k sur chacun des $k+1$ intervalles $[x_j, x_{j+1}]$, $0 \leqslant j \leqslant k$; en effet, Q_k (ou plus exactement la fonction polynomiale associée) est continue sur $[x_j, x_{j+1}]$, dérivable sur $]x_j, x_{j+1}[$ et l'on a $Q_k(x_j) = Q_k(x_{j+1}) = 0$ par hypothèse. Dans ces conditions, le polynôme Q_k' s'annule en un point de l'intervalle $]x_j, x_{j+1}[$. On a ainsi construit $k+1$ racines pour le polynôme $Q_k' = Q_{k+1}$, toutes dans l'intervalle $]-1, 1[$, ce qui constitue le résultat au rang $k+1$ et achève la démonstration.

Exercice 17
Question 1

On a $I_0 = \pi/2$, $I_1 = 1$ et

$$I_2 = \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\Big[t - \frac{\sin(2t)}{2}\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

De plus, le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - t$ donne pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \,\mathrm{d}t = \int_{\pi/2}^0 \sin^n\Big(\frac{\pi}{2} - u\Big)(-\mathrm{d}u) = \int_0^{\pi/2} \cos^n u \,\mathrm{d}u.$$

Exercice 17
Question 2

Pour $n \geqslant 2$, on intègre par parties en primitivant sin et en dérivant $\sin^{n-1}$:

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} t \sin t \,\mathrm{d}t = -\int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} t \,\mathrm{d}(\cos t) \\ &= -\Big[\sin^{n-1} t \cos t\Big]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos t \,\mathrm{d}(\sin^{n-1} t) \\ &= (n-1)\int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin^{n-2} t \,\mathrm{d}t \\ &= (n-1)\int_0^{\pi/2} (1-\sin^2 t)\sin^{n-2} t \,\mathrm{d}t = (n-1)(I_{n-2} - I_n). \end{aligned}$$

On en déduit la relation de récurrence :

$$\forall n \geqslant 2, \qquad I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Exercice 17
Question 3

On a pour $n \in \mathbb{N}$ donné et tout $t \in \big[0, \frac{\pi}{2}\big]$, $0 \leqslant \sin t \leqslant 1$ d'où l'on tire $0 \leqslant \sin^{n+1} t \leqslant \sin^n t$. Par croissance de l'intégrale sur le segment $\big[0, \frac{\pi}{2}\big]$, on en déduit que $0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$, ce qui établit la décroissance de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a mieux que $I_n \geqslant 0$: puisque la fonction $\sin^n$ est continue, positive et non identiquement nulle sur $\big[0, \frac{\pi}{2}\big]$, son intégrale I_n sur ce segment est non nulle ; on a donc $I_n > 0$.
La décroissance de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la relation de récurrence établie à la question **2.** donnent alors :

$$\forall n \geqslant 2, \qquad 1 \leqslant \frac{I_{n-1}}{I_n} \leqslant \frac{I_{n-2}}{I_n} = \frac{n}{n-1}.$$

Le théorème des gendarmes s'applique et fournit la convergence de I_{n-1}/I_n vers 1 lorsque $n \to \infty$, ce qui signifie que $I_n \sim I_{n-1}$ lorsque $n \to \infty$.

Exercice 17
Question 4

La relation de récurrence établie à la question **2.** fournit :

$$\forall n \geqslant 2, \qquad nI_nI_{n-1} = (n-1)I_{n-1}I_{n-2},$$

de sorte que la suite $(nI_nI_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante, égale à son terme initial :

$$\forall n \geqslant 1, \qquad nI_nI_{n-1} = I_1I_0 = \frac{\pi}{2}.$$

D'après la question **3.**, on a donc :

$$I_n^2 \underset{n\to\infty}{\sim} I_nI_{n-1} = \frac{\pi}{2n},$$

et finalement (puisque $I_n \geqslant 0$) :

$$I_n \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Exercice 17
Question 5

La relation de récurrence établie à la question **2.** donne $I_{2k} = (2k-1)/(2k) \cdot I_{2k-2}$ pour tout $k \geqslant 1$, de sorte qu'on est tenté d'écrire, pour $p \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} I_{2p} &= \frac{2p-1}{2p} I_{2p-2} = \frac{2p-1}{2p} \cdot \frac{2p-3}{2p-2} I_{2p-4} = \cdots \\ &= \frac{2p-1}{2p} \cdot \frac{2p-3}{2p-2} \cdots \frac{1}{2} I_0 = \frac{(2p-1)!!}{(2p)!!}\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Pour rédiger rigoureusement ce raisonnement, on peut démontrer par récurrence sur p que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \qquad I_{2p} = \frac{(2p-1)!!}{(2p)!!}\frac{\pi}{2}.$$

(en convenant que $0!! = (-1)!! = 1$).

- Initialisation : on a bien $I_0 = \pi/2$ d'après la question **1.**.
- Hérédité : si la formule est acquise à un rang $p \in \mathbb{N}$, alors d'après la relation de récurrence,

$$\begin{aligned} I_{2(p+1)} = I_{2p+2} &= \frac{2p+1}{2p+2} I_{2p} = \frac{2p+1}{2p+2}\frac{(2p-1)!!}{(2p)!!}\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2p+1)!!}{(2p+2)!!}\frac{\pi}{2} = \frac{(2(p+1)-1)!!}{(2(p+1))!!}\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

La formule est ainsi démontrée pour tout $p \in \mathbb{N}$.

On peut aussi démontrer le résultat en utilisant un produit téléscopique :

$$\forall p\in\mathbb{N},\qquad I_{2p}=I_0\prod_{k=1}^{p}\frac{I_{2k}}{I_{2k-2}}=\frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{p}\frac{2k-1}{2k}=\frac{(2p-1)!!}{(2p)!!}\frac{\pi}{2}.$$

À partir de $I_1=1$ et $I_{2k+1}=(2k)/(2k+1)\cdot I_{2k-1}$ pour tout $k\geqslant 1$, il vient de même :

$$\forall p\in\mathbb{N},\qquad I_{2p+1}=I_1\prod_{k=1}^{p}\frac{I_{2k+1}}{I_{2k-1}}=\prod_{k=1}^{p}\frac{2k}{2k+1}=\frac{(2p)!!}{(2p+1)!!}.$$

De la question **3.**, on tire que I_{2p+1}/I_{2p} tend vers 1 lorsque $p\to\infty$. Comme d'après les formules précédentes,

$$\frac{I_{2p+1}}{I_{2p}}=\frac{\left((2p)!!\right)^2}{\left((2p-1)!!\right)^2(2p+1)}\frac{2}{\pi},$$

on obtient la formule de Wallis :

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}=\lim_{p\to\infty}\frac{(2p)!!}{(2p-1)!!\sqrt{2p+1}}.$$

Pour finir, en remarquant que $(2p)!!=2^p p!$ pour tout $p\in\mathbb{N}$, on peut simplifier les formules précédentes :

$$\forall p\in\mathbb{N},\quad I_{2p}=\frac{(2p)!}{\left((2p)!!\right)^2}\frac{\pi}{2}=\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2}$$

et

$$\forall p\in\mathbb{N},\quad I_{2p+1}=\frac{\left((2p)!!\right)^2}{(2p+1)!}=\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.$$

Exercice 18

Question 1

La fonction f, continue sur $\mathbb{R}$, y admet des primitives. Soit F l'une d'entre elles. On a :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad F(x+T)-F(x)=\int_x^{x+T}f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t=0$$

car l'intégrale d'une fonction T-périodique sur un segment de longueur T ne dépend pas du choix de ce segment.
Ainsi les primitives de f sont T-périodiques.

Exercice 18

Question 2

Étant donné $\lambda>0$, le changement de variable $u=\lambda t$ donne :

$$\int_a^b f(\lambda t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\lambda}\int_{\lambda a}^{\lambda b}f(u)\,\mathrm{d}u=\frac{F(\lambda b)-F(\lambda a)}{\lambda}.$$

Or F, continue sur le segment $[0,T]$, y est bornée. Étant par ailleurs T-périodique d'après **1.**, cette fonction est bornée sur $\mathbb{R}$: il existe $M\geqslant 0$ tel que $|F(x)|\leqslant M$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
Dès lors,

$$\forall\lambda>0,\quad\left|\int_a^b f(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{|F(\lambda b)|+|F(\lambda a)|}{\lambda}\leqslant\frac{2M}{\lambda}\xrightarrow[\lambda\to+\infty]{}0.$$

On en déduit par encadrement que :

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(\lambda t)\,\mathrm{d}t=0.$$

Exercice 19

Question 1

D'après la formule de Taylor avec reste intégral appliquée à la fonction exponentielle, de classe $\mathscr{C}^{n+1}$, sur l'intervalle $[0,1]$, on a :

$$\mathbf{e}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\frac{1}{n!}I_n.$$

Par suite,

$$I_n=n!\frac{p}{q}-\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}=n!\frac{p}{q}-\sum_{k=0}^{n}n(n-1)\cdots(k+1)$$

est un entier pour $n\geqslant q$.

Exercice 19

Question 2

On a :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad 0\leqslant I_n=\int_0^1(1-t)^n\mathbf{e}^t\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1(1-t)^n\mathbf{e}\,\mathrm{d}t=\frac{\mathbf{e}}{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

On en déduit par encadrement que (I_n) converge vers 0.

Exercice 19

Question 3

D'après les questions **1.** et **2.**, on doit avoir $I_n\in\mathbb{Z}\cap\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$, c'est-à-dire $I_n=0$ pour n assez grand.
Or ceci est absurde car la fonction $t\longmapsto(1-t)^n\mathbf{e}^t$ est continue, positive mais non identiquement nulle sur le segment $[0,1]$.
C'est donc que l'hypothèse initiale est fausse : $\mathbf{e}$ est irrationnel.

Exercice 20

Pour $x \in \mathbb{R}$ donné et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall t \in [0, x], \quad \left|\exp^{(n+1)} t\right| = \mathbf{e}^t \leqslant \mathbf{e}^{|x|}$$

(inégalité valable pour x positif ou négatif) si bien que, par application de l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction exp sur l'intervalle $[0, x]$ à l'ordre n,

$$\left|\mathbf{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| \leqslant \frac{\mathbf{e}^{|x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

On en déduit la convergence et la somme ci-dessous :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathbf{e}^x.$$

Exercice 21

La formule de Taylor appliquée à f à l'ordre 2 en a donne :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) + o(h^2), \quad h \to 0$$

d'où également :

$$f(a-h) = f(a) - hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) + o(h^2), \quad h \to 0.$$

Par suite :

$$\frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} = f''(a) + o(1) \xrightarrow[h\to 0]{} f''(a).$$