Préparation aux oraux
Semaine 1

1 > ESCP 2015 1.03 <

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Démontrer que l'intégrale
$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$
est convergente si, et seulement si, $x > 0$.

L'exercice a pour but l'étude de la fonction
$$\mathrm{F} : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

2. Étudier le sens de variation de F sur $]0, +\infty[$.
3. **a.** Démontrer que :
$$\forall x > 0, \quad \mathrm{F}(x) \geqslant \frac{1}{\mathrm{e}} \int_0^{1/\sqrt{x}} \frac{\mathrm{d}t}{1+t}.$$
En déduire la limite de F en 0.
b. Démontrer que :
$$\forall x > 0, \quad \mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u^2}}{\sqrt{x}+u}\,\mathrm{d}u.$$
En déduire la limite de F en $+\infty$.
4. Prouver que :
$$\forall x, x_0 \in]0, +\infty[, \quad |\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(x_0)| \leqslant \frac{\left|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\right|}{\sqrt{x}\sqrt{x_0}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$
En déduire que F est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
5. Démontrer que
$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x}\mathrm{F}(x) - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) = -\frac{1}{2}.$$
En déduire que :
$$\mathrm{F}(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \to +\infty.$$

2 > HEC 2015 S-132, exercice principal <

1. *Question de cours :* formule du rang pour une application linéaire, application à la caractérisation des isomorphismes.

Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 3. On note $\mathrm{E} = \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $n-1$ et $\mathcal{B} = (1, \mathrm{X}, \ldots, \mathrm{X}^{n-1})$ sa base canonique. On considère n réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vérifiant $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$.

2. Montrer que l'application $\mathrm{T} : \mathrm{E} \longrightarrow \mathbb{R}^n, \mathrm{P} \longmapsto \mathrm{T}(\mathrm{P}) = \big(\mathrm{P}(a_1), \mathrm{P}(a_2), \ldots, \mathrm{P}(a_n)\big)$ est bijective.
3. On note $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on désigne par L_i le polynôme de E tel que $\mathrm{T}(\mathrm{L}_i) = e_i$.
a. Préciser pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, la valeur de $\mathrm{L}_i(a_j)$.
b. Montrer que $\mathcal{B}' = (\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2, \ldots, \mathrm{L}_n)$ est une base de E et que :
$$\forall \mathrm{P} \in \mathrm{E}, \quad \mathrm{P} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(a_i)\mathrm{L}_i.$$

Dans toute la suite de l'exercice, on note $\mathrm{A} = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

4. Dans cette question uniquement, on suppose que $n = 3$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ et $a_3 = 2$.
a. Déterminer les polynômes L_1, L_2 et L_3 et expliciter la matrice A.
b. Montrer que 1 est valeur propre de A et déterminer le sous-espace propre associé.
c. En déduire les polynômes de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ vérifiant $\mathrm{P} = \mathrm{P}(0) + \mathrm{P}(1)\mathrm{X} + \mathrm{P}(2)\mathrm{X}^2$.
5. **a.** Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.
b. Établir la relation $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{L}_i = 1$.
c. Montrer que :
$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$
d. Lorsque $a_1 = 1$, déterminer la somme des coefficients de chaque colonne de A.

3 > HEC 2015 S-132, exercice sans préparation <

On considère une expérience consistant à lancer un dé équilibré n fois de manière consécutive. L'expérience en question est décrite par le programme Scilab ci-dessous pour la valeur $n = 10$ (et répétée ici 1000 fois) :

Listing 1 : code à analyser

```
Nexp=1000;
n=10;
u=floor(2*rand(n,Nexp))+1;
test=0;
for k=1:Nexp
  ok=1;
  for i=2:n
    if ((u(i-1,k)==1) & (u(i,k)==1)) then
      ok=0;
    end
  end
  test=test+ok;
end
Pn=test/Nexp;
disp(Pn)
```

1. Que représente la variable Pn affichée par le programme ?
2. En notant P_n le résultat de l'expérience précédente pour une valeur de n quelconque, montrer que :
$$P_n = \frac{1}{2}P_{n-1} + \frac{1}{4}P_{n-2}$$
puis trouver la limite de P_n lorsque $n \to \infty$.

4 `> ESCP 2015 3.01 <`

Soit $n \geqslant 2$ un entier. On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.

1. On effectue des tirages successifs et sans remise d'une boule de cette urne jusqu'à obtenir la boule numérotée n. On note X_1 le nombre de tirages ainsi effectués. Déterminer la loi de X_1 et son espérance.

Les deux questions suivantes étudient deux prolongements possibles de l'expérience à l'issue de cette première série de tirages.

2. Après cette première série de tirages, on continue de sortir les boules de l'urne jusqu'à obtenir la boule de plus grand numéro parmi les numéros restants. On note X_2 le nombre de nouveaux tirages ainsi effectués (si, à l'issue de la première série de tirages, l'urne est vide, on décide que X_2 prend alors la valeur 0).
   a. Déterminer la loi de X_2 et vérifier que $\sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{P}(X_2 = j) = 1$.
   b. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
   c. Calculer l'espérance de X_2.
3. Après cette première série de tirages, s'il reste au moins une boule dans l'urne, on tire une boule au hasard et on note X_3 le numéro obtenu (si l'urne est vide, on convient que X_3 prend la valeur 0).
   a. Déterminer la loi du couple (X_1, X_3).
   b. Déterminer la loi de X_3.

5 `> HEC 2015 S-136, exercice principal <`

1. *Question de cours :* définition de la convergence en loi d'une suite de variables aléatoires.
2. **a.** Justifier la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$.
   b. Calculer
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{et} \quad r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi uniforme sur l'intervalle $\left[\frac{1}{n(n+1)} - 1, \frac{1}{n(n+1)} + 1\right]$.
On pose :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \left(X_k - \frac{1}{k(k+1)}\right).$$

3. **a.** Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, quelle est la loi de $X_k - \frac{1}{k(k+1)}$? Rappeler son espérance et sa variance.
   b. Étudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
4. **a.** Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel n_0 tel que :
$$\forall n \geqslant n_0, \quad \mathbb{P}\left(Y_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}(n+1)}\right) \leqslant \mathbb{P}(Y_n \leqslant \varepsilon).$$
   b. Déterminer
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Y_n \leqslant \varepsilon).$$
   c. En déduire la valeur de
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k \leqslant 1\right).$$

6 `> HEC 2015 S-136, exercice sans préparation <`

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimension finie $n \geqslant 2$. On considère des endomorphismes f, p et q de E ainsi que des scalaires distincts λ et μ tels que :
$$\forall k \in \{0, 1, 2\}, \quad f^k = \lambda^k p + \mu^k q.$$

1. Montrer que $(f - \lambda\,\mathrm{id}_E) \circ (f - \mu\,\mathrm{id}_E) = 0$.
2. En déduire que l'ensemble des valeurs propres de f est inclus dans $\{\lambda, \mu\}$ et que f est diagonalisable.

7 `> ESCP 2015 2.03 <`

1. Montrer pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, la convergence de l'intégrale
$$\int_0^1 t^2(\ln t - xt - y)^2\,\mathrm{d}t.$$
On note alors $\varphi(x, y)$ la valeur de cette intégrale.
2. Montrer que les valeurs propres de la matrice
$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$
sont strictement positives.
3. **a.** Montrer que la fonction φ définie en **1.** est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et qu'elle admet un unique point critique (x_0, y_0) que l'on déterminera.
   b. Montrer que :
$$\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \varphi(x, y) = \varphi(x_0, y_0).$$
4. Montrer que l'ensemble E des fonctions $f :]0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues telles que l'intégrale $\int_0^1 t^2 f(t)^2\,\mathrm{d}t$ converge est un espace vectoriel et que l'on définit un produit scalaire sur E en posant :
$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 t^2 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

5. Montrer que si X est un ensemble et si $h : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction, alors $\inf_X h^2 = (\inf_X h)^2$.
En déduire à l'aide de la question **4.**, mais indépendamment des résultats de la question **3.**, comment retrouver que

$$\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \varphi(x,y) = \varphi(x_0, y_0).$$

$\boxed{8}$ `> HEC 2015 S-139, exercice principal <`

1. *Question de cours :* rappeler la formule donnant la densité d'une somme de deux variables aléatoires à densité indépendantes.

2. Soient a, b et α trois réels strictement positifs vérifiant $0 < \alpha < a^2 \leqslant b^2$.

a. Établir la convergence de l'intégrale

$$\int_0^\alpha \left(\frac{a}{\sqrt{t}} - 1\right)\left(\frac{b}{\sqrt{\alpha - t}} - 1\right) \mathrm{d}t.$$

Cette intégrale est notée $I_{a,b}(\alpha)$.

b. Calculer $I_{a,b}(\alpha)$ à l'aide du changement de variable $t = \alpha \cos^2 u$.

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on place deux points M et N tels que leurs abscisses respectives X_M et X_N suivent la loi uniforme sur $]0, a[$ et leurs ordonnées Y_M et Y_N suivent la loi uniforme sur $]0, b[$.
On suppose que les quatre variables aléatoires X_M, X_N, Y_M et Y_N sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et sont indépendantes.
On note D la variable aléatoire égale à la longueur du segment $[M, N]$:

$$D^2 = (X_N - X_M)^2 + (Y_N - Y_M)^2.$$

3. **a.** Quelle est la loi suivie par $-X_M$?

b. On pose $Z_a = X_N - X_M$ et $Z_b = Y_N - Y_M$. Déterminer les lois de probabilité de Z_a et Z_b respectivement.

c. Montrer qu'une densité $f_{Z_a^2}$ de Z_a^2 est donnée par

$$f_{Z_a^2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{a^2}\left(\frac{a}{\sqrt{x}} - 1\right) & \text{si } 0 < x < a^2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

4. Soit $\theta < a$. Calculer $\mathbb{P}(D \leqslant \theta)$.

$\boxed{9}$ `> HEC 2015 S-139, exercice sans préparation <`

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie et f un endomorphisme de E.

1. Établir l'existence d'un polynôme P non nul tel que $P(f) = 0$.

2. Soit Q un polynôme tel que $Q(f) = 0$ et de degré minimal parmi les polynômes non nuls tels que $P(f) = 0$. Montrer que toute racine de Q est valeur propre de f.