Devoir libre 11

À rendre lundi 5 mars 2018

Exercice

On considère $n \geqslant 1$ urnes numérotées de 1 à n et $\mathrm{N} = an$ boules numérotées de 1 à N, où a est un entier non nul. On place au hasard chacune des N boules dans une des n urnes, indépendamment les unes des autres.
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on considère la variable aléatoire T_i égale à 1 si l'urne numérotée i est vide et 0 sinon. On note également Y_n le nombre d'urnes vides et $\mathrm{S}_n = \mathrm{Y}_n/n$.

1. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, donner la loi de T_i et préciser son espérance.

2. Pour $i, j \in [\![1, n]\!]$, calculer $\mathrm{cov}(\mathrm{T}_i, \mathrm{T}_j)$.

3. Calculer $\mathbb{E}(\mathrm{S}_n)$ et sa limite lorsque $n \to \infty$.

4. Calculer $\mathbb{V}(\mathrm{S}_n)$ et sa limite lorsque $n \to \infty$.

5. **a.** Justifier que :
$$\left|\mathrm{S}_n - \mathbf{e}^{-a}\right| \leqslant |\mathrm{S}_n - \mathbb{E}(\mathrm{S}_n)| + \left|\mathbb{E}(\mathrm{S}_n) - \mathbf{e}^{-a}\right|.$$

b. En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que :
$$\forall n \geqslant n_0, \quad \mathbb{P}\left(\left|\mathrm{S}_n - \mathbf{e}^{-a}\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \mathbb{P}\left(|\mathrm{S}_n - \mathbb{E}(\mathrm{S}_n)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

c. Montrer que :
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\mathrm{S}_n - \mathbf{e}^{-a}\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0.$$

d. Interpréter le résultat précédent.

Problème

Dans tout le problème, E désigne un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$. On considère un endomorphisme f symétrique non nul de E. On suppose que f n'est pas inversible.

Première partie : inverse généralisé d'un endomorphisme symétrique

1. Justifier que 0 est valeur propre de f et que f admet au moins une valeur propre non nulle.

2. Démontrer (complètement) que les sous-espaces propres de f sont deux-à-deux orthogonaux.

3. Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Im} f$ et $\mathrm{Ker} f$ sont supplémentaires orthogonaux dans E.

On suppose que f admet exactement $k+1$ valeurs propres $\lambda_0, \dots, \lambda_k$ deux-à-deux distinctes, avec $k \geqslant 1$, $\lambda_0 = 0$ et $0 < |\lambda_1| \leqslant \cdots \leqslant |\lambda_k|$.
Pour tout entier naturel $j \leqslant k$, on note p_j le projecteur orthogonal de E sur le sous-espace propre $\mathrm{E}_f(\lambda_j)$ de f pour la valeur propre λ_j.

4. Soit x un vecteur de E.

a. Montrer qu'il existe un unique $(x_0, \dots, x_k) \in \mathrm{E}_f(\lambda_0) \times \cdots \times \mathrm{E}_f(\lambda_k)$ tel que $x = x_0 + \cdots + x_k$.

b. Pour tout entier naturel $j \leqslant k$, montrer que $p_j(x) = x_j$.

c. En déduire que $\mathrm{id}_\mathrm{E} = p_0 + \cdots + p_k$.

5. **a.** Établir :
$$\forall (i,j) \in [\![0, k]\!]^2, \quad i \neq j \Longrightarrow p_i \circ p_j = 0.$$

b. Montrer que $f = \lambda_1 p_1 + \cdots + \lambda_k p_k$.

c. Montrer que le projecteur orthogonal p sur $\mathrm{Im} f$ vérifie $p = p_1 + \cdots + p_k$.

On appelle *inverse généralisé* de f et on note $f^\sharp$ l'endomorphisme
$$f^\sharp = \frac{1}{\lambda_1} p_1 + \cdots + \frac{1}{\lambda_k} p_k.$$

6. **a.** Montrer que $f \circ f^\sharp = p$.
b. En déduire que pour tous $x, y \in \mathrm{E}$,
$$f(x) = p(y) \quad \Longleftrightarrow \quad x - f^\sharp(y) \in \operatorname{Ker} f.$$

7. Soit y un vecteur de E.
a. Montrer que pour tout $x \in \mathrm{E}$,
$$\|f(x) - y\| = \inf_{z \in \mathrm{E}} \|f(z) - y\| \quad \Longleftrightarrow \quad x - f^\sharp(y) \in \operatorname{Ker} f.$$
b. En déduire que $f^\sharp(y)$ est le vecteur x de norme minimale vérifiant :
$$\|f(x) - y\| = \inf_{z \in \mathrm{E}} \|f(z) - y\|.$$

8. On suppose l'espace E rapporté à une base orthonormale $\underline{e}$. Soient $(v_1, \ldots, v_n)$ une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de f, associés aux valeurs propres $\mu_1, \ldots, \mu_n$.
Exprimer la matrice $\mathrm{A}^\sharp$ de $f^\sharp$ en base $\underline{e}$ en fonction des matrices colonnes $\mathrm{V}_1, \ldots, \mathrm{V}_n$ représentant les vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ en base $\underline{e}$.

Deuxième partie : application à un exemple

Dans cette partie, E est un espace euclidien de dimension 4 et $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base orthonormale de E. On considère l'endomorphisme f représenté en base $\underline{e}$ par la matrice
$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Justifier que f est un endomorphisme symétrique non nul et non inversible.

2. Montrer que f admet exactement trois valeurs propres distinctes λ_0, λ_1 et λ_2 avec $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2$.

On note p_1 (resp. p_2) le projecteur orthogonal sur le sous-espace propre $\mathrm{E}_f(\lambda_1)$ (resp. $\mathrm{E}_f(\lambda_2)$) et M_1 (resp. M_2) la matrice représentative de p_1 (resp. p_2) en base $\underline{e}$.

3. Exprimer la matrice A en fonction de M_1 et M_2.

4. Déterminer la matrice M_2 et en déduire la matrice M_1.

5. En déduire la matrice représentative de $f^\sharp$ en base $\underline{e}$.