

ENDOMORPHISMES ET MATRICES SYMÉTRIQUES

1 Endomorphismes et matrices symétriques	2
1.1 Endomorphismes symétriques	2
1.2 Réduction des endomorphismes symétriques	2
1.3 Réduction des matrices symétriques réelles	3
2 Application à l'étude du signe d'une forme quadratique	3
2.1 Formes quadratiques	3
2.2 Lien avec les endomorphismes et matrices symétriques	4
2.3 Étude du signe d'une forme quadratique	5

1. Endomorphismes et matrices symétriques

1.1 Endomorphismes symétriques

Dans toute cette section, E est un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. Le produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et la norme $\|\cdot\|$.

DÉFINITION 1.1 *Un endomorphisme u de E est dit **symétrique** (ou **auto-adjoint**) si :*

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle.$$

Remarque 1.2 • La condition précédente signifie que les rôles de x et y sont symétriques dans l'expression $\langle u(x), y \rangle$.

- Il suffit de vérifier la condition de la définition lorsque x et y sont des vecteurs de base.

Exemple 1.3 Un projecteur p donné de E est symétrique si, et seulement si, c'est un projecteur orthogonal.

PROPOSITION 1.4 *Soit u un endomorphisme de E .*

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- l'endomorphisme u est symétrique ;*
- l'endomorphisme u est représenté par une matrice symétrique dans une base orthonormale de E ;*
- l'endomorphisme u est représenté par une matrice symétrique dans toute base orthonormale de E .*

Remarque 1.5 Par définition, une matrice symétrique $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ est dite positive (resp. définie-positive) si la forme bilinéaire $(X, Y) \mapsto {}^tXAY$ sur $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui lui est canoniquement associée est positive (resp. définie-positive) i.e. :

$$\forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXAX \geq 0 \quad \left(\text{resp. } \forall X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, {}^tXAX > 0 \right).$$

De même, un endomorphisme symétrique u sur un espace vectoriel euclidien E induit une forme bilinéaire symétrique $\varphi : (x, y) \mapsto \langle u(x), y \rangle$ sur E . On dira que l'endomorphisme u est positif (resp. défini-positif) si la forme bilinéaire symétrique φ est positive (resp. définie-positive) i.e. :

$$\forall x \in E, \langle u(x), x \rangle \geq 0 \quad \left(\text{resp. } \forall x \in E \setminus \{0\}, \langle u(x), x \rangle > 0 \right).$$

1.2 Réduction des endomorphismes symétriques

On conserve les notations de la section précédente.

PROPOSITION 1.6 *Les sous-espaces propres d'un endomorphisme symétrique de E sont deux-à-deux orthogonaux.*

PROPOSITION 1.7 *Soient u un endomorphisme symétrique et F un sous-espace de E .*

Si F est stable par u , alors F^\perp est aussi stable par u .

Remarque 1.8 Si l'on a déjà trouvé des valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ pour un endomorphisme u symétrique, et déterminé les sous-espaces propres $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_r}$ associés, les vecteurs propres restants (desquels on déduira les valeurs propres restantes) seront à rechercher dans le sous-espace propre $G = \left(\bigoplus_{i=1}^r E_{\lambda_i} \right)^\perp$. Ce dernier étant stable, on pourra s'intéresser à la matrice de l'endomorphisme induit par u sur G dans une base bien choisie.

LEMME 1.9 *Tout endomorphisme symétrique de E admet (au moins) une valeur propre.*

THÉORÈME 1.10 *Soit u un endomorphisme symétrique de E .*

Les sous-espaces propres de u sont supplémentaires orthogonaux. De manière équivalente, il existe une base orthonormale de E dans laquelle u est représenté par une matrice diagonale.

1.3 Réduction des matrices symétriques réelles

L'espace vectoriel $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est muni de son produit scalaire canonique.

THÉORÈME 1.11 Soit $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.

Les sous-espaces propres de A sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. De manière équivalente, il existe une matrice $P \in \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ orthogonale et une matrice $D \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que :

$$D = P^{-1}AP = {}^tPAP.$$

Remarques 1.12 • Une matrice symétrique $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ peut être diagonalisée par une matrice de passage P non orthogonale ! Cependant, le choix d'une matrice orthogonale permet d'épargner le calcul de P^{-1} , qui s'obtient alors par simple transposition ; il est donc intéressant lorsque ce calcul est nécessaire par la suite (calcul de puissances de matrices, ...). Ce choix s'avère également pertinent dans de nombreuses situations théoriques (cf. travaux dirigés).

- En pratique, pour diagonaliser une matrice symétrique réelle A avec une matrice de passage orthogonale, on détermine les sous-espaces propres, on choisit une base orthonormale de chacun d'eux puis il ne reste qu'à constituer la matrice P , automatiquement orthogonale, dont les colonnes sont les vecteurs ainsi choisis.



- Attention ! Une matrice symétrique à coefficients complexes n'est en général pas diagonalisable. C'est le cas de la matrice symétrique

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{i} \\ \mathbf{i} & -1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_2(\mathbb{C}).$$

Exemple 1.13 Soit

$$A = \begin{pmatrix} 13 & -2 & -3 \\ -2 & 10 & -6 \\ -3 & -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Déterminer $P \in \mathbf{GL}_3(\mathbb{R})$ orthogonale telle que la matrice $D = P^{-1}AP$ soit diagonale.

PROPOSITION 1.14 Soit $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.

En notant (X_1, \dots, X_n) une base orthonormale de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de colonnes propres de A et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres associées, on a :

$$A = \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i {}^t X_i.$$

Remarque 1.15 Tout projecteur orthogonal p de l'espace euclidien E est symétrique et est donc à ce titre représenté en base orthonormale \underline{e} par une matrice A symétrique.

Si (u_1, \dots, u_r) est une base orthonormale de $F = \text{Im } p = \text{Ker}(p - \text{id}_E)$ et (u_{r+1}, \dots, u_n) une base orthonormale de $F^\perp = \text{Ker } p$, alors (u_1, \dots, u_n) est une base orthonormale de E formée de vecteurs propres pour p , respectivement associés à la valeur propre 1 pour les r premiers et 0 pour les suivants. En notant U_1, \dots, U_n les colonnes des coordonnées de ces vecteurs en base \underline{e} , l'énoncé précédent donne donc $A = \sum_{i=1}^r U_i {}^t U_i$: le résultat précédent généralise donc une formule établie dans le chapitre précédent.

2. Application à l'étude du signe d'une forme quadratique

2.1 Formes quadratiques

Les espaces \mathbb{R}^n et $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sont munis de leurs structures euclidiennes canoniques. Ces deux espaces sont canoniquement isomorphes : on notera en minuscules (x, y, \dots) les éléments de \mathbb{R}^n et en majuscules (X, Y, \dots) les éléments de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui leur correspondent.

DÉFINITION 2.1 On appelle **forme quadratique** sur \mathbb{R}^n toute application $q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ pour laquelle existe une forme bilinéaire φ sur \mathbb{R}^n telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad q(x) = \varphi(x, x).$$

Exemple 2.2 Le carré d'une norme euclidienne sur \mathbb{R}^n est une forme quadratique.

PROPOSITION 2.3 Soit q une forme quadratique sur \mathbb{R}^n .

On a :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad q(\lambda x) = \lambda^2 q(x).$$

Remarque 2.4 En revanche, on ne dispose pas de formule pour $q(x + y)$ sans faire intervenir la forme bilinéaire φ :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad q(x + y) = q(x) + \varphi(x, y) + \varphi(y, x) + q(y).$$

PROPOSITION 2.5 Une application $q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est une forme quadratique si, et seulement si, il existe une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad q(x) = {}^t X A X = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} x_i x_j.$$

Exemple 2.6 Les formes bilinéaires φ_1 et φ_2 sur \mathbb{R}^2 canoniquement associées aux matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

définissent la même forme quadratique :

$$\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad {}^t X A_1 X = {}^t X A_2 X = x_1^2 - 2x_1 x_2 + 3x_2^2 = q(x).$$

Remarque 2.7 À toute matrice $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ est canoniquement associée une forme bilinéaire sur \mathbb{R}^n et donc une forme quadratique sur \mathbb{R}^n . Mais cette association n'est pas bijective comme on vient de le voir. De même, à tout endomorphisme u de \mathbb{R}^n est associée la forme bilinéaire $\varphi : (x, y) \longmapsto \langle u(x), y \rangle$ sur \mathbb{R}^n et donc la forme quadratique $q : x \longmapsto \langle u(x), x \rangle$.

2.2 Lien avec les endomorphismes et matrices symétriques

Comme on vient de le voir, il n'y a pas unicité de la forme bilinéaire φ à l'origine d'une forme quadratique q . Il y a cependant unicité d'une telle forme bilinéaire *symétrique* :

PROPOSITION 2.8 Soit q une forme quadratique sur \mathbb{R}^n .

Il existe une unique forme bilinéaire symétrique φ sur \mathbb{R}^n , appelée **forme polaire** de q , telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad q(x) = \varphi(x, x).$$

Remarque 2.9 On dira qu'une forme quadratique q sur \mathbb{R}^n est positive (resp. définie-positive) si sa forme polaire φ est positive (resp. définie positive).

D'un point de vue matriciel ou géométrique, le résultat précédent prend la forme suivante.

PROPOSITION 2.10 Soit q une forme quadratique sur \mathbb{R}^n .

(i) Il existe une unique matrice $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad q(x) = {}^t X A X.$$

(ii) Il existe un unique endomorphisme u symétrique de \mathbb{R}^n tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad q(x) = \langle u(x), x \rangle.$$

La matrice A représente l'endomorphisme u en base canonique.

On dira que A et u sont respectivement les matrice et endomorphisme symétriques associés à q .

Remarque 2.11 Si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique, la forme quadratique qui lui est canoniquement associée s'écrit, pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$q(x) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} x_i x_j = \sum_{i=1}^n a_{i,i} x_i^2 + \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} a_{i,j} x_i x_j = \sum_{i=1}^n a_{i,i} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} x_i x_j.$$

Exemple 2.12 Déterminer la matrice symétrique $A \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ associée à la forme quadratique :

$$q : x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto 3x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - x_2x_3.$$

2.3 Étude du signe d'une forme quadratique

LEMME 2.13 Soient q une forme quadratique sur \mathbb{R}^n et u l'endomorphisme symétrique de \mathbb{R}^n qui lui est associé. Soient $\underline{e} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de \mathbb{R}^n formée de vecteurs propres de u et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres associées.

Pour $x \in \mathbb{R}^n$ de coordonnées (ξ_1, \dots, ξ_n) dans la base \underline{e} , on a :

$$q(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle e_i, x \rangle^2.$$

PROPOSITION 2.14 Soient q une forme quadratique sur \mathbb{R}^n et u l'endomorphisme symétrique de \mathbb{R}^n qui lui est associé. En notant α (resp. β) la plus petite (resp. la plus grande) valeur propre de u , on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \|x\|^2 \leq q(x) \leq \beta \|x\|^2.$$

Un vecteur $x \neq 0$ réalise l'égalité dans l'inégalité de gauche (resp. de droite) si, et seulement si, il est propre pour u , associé à la valeur propre α (resp. β).

THÉORÈME 2.15 Soient q une forme quadratique sur \mathbb{R}^n et u l'endomorphisme symétrique de \mathbb{R}^n qui lui est associé.

(i) Si les valeurs propres de u sont toutes positives ou nulles (resp. toutes négatives ou nulles), alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad q(x) \geq 0 \quad (\text{resp. } q(x) \leq 0).$$

(ii) Si les valeurs propres de u sont toutes strictement positives (resp. toutes strictement négatives), alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad q(x) > 0 \quad (\text{resp. } q(x) < 0).$$

(iii) Si u admet 0 pour valeur propre, alors :

$$\exists x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad q(x) = 0.$$

(iv) Si u admet deux valeurs propres non nulles de signes contraires, alors :

$$\exists x, y \in \mathbb{R}^n, \quad q(x)q(y) < 0.$$

Remarque 2.16 Dans les deux énoncés précédents, les valeurs propres de u sont aussi celles de la matrice symétrique $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ associée à q .

Remarque 2.17 Dans l'énoncé précédent, les assertions (iii) et (iv) montrent que (i) et (ii) sont des équivalences, mais la réciproque de (iii) est fausse.

COROLLAIRE 2.18 Soient φ une forme bilinéaire symétrique sur \mathbb{R}^n et A sa matrice en base canonique.

(i) La forme bilinéaire φ est positive si, et seulement si, toutes les valeurs propres de A sont positives ou nulles.

(ii) La forme bilinéaire φ est définie-positive si, et seulement si, toutes les valeurs propres de A sont strictement positives.

Remarque 2.19 L'énoncé précédent vaut pour une forme bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel E de dimension finie et A une matrice qui la représente dans une base quelconque de E .

Il en ressort la caractérisation suivante des matrices symétriques positives (resp. définies-positives), que l'on demande fréquemment de redémontrer dans les épreuves de concours.

COROLLAIRE 2.20 *Soit $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.*

(i) La matrice A est positive si, et seulement si, toutes ses valeurs propres sont positives ou nulles.

(ii) La matrice A est définie-positive si, et seulement si, toutes ses valeurs propres sont strictement positives.