

ESPACES EUCLIDIENS

1 Bases orthonormales	2
1.1 Expression du produit scalaire	2
1.2 Existence de bases orthonormales	3
1.3 Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt	3
2 Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace vectoriel	3
2.1 Théorème fondamental	3
2.2 Premières conséquences	4
2.3 Projecteurs orthogonaux	4
3 Application aux problèmes de minimisation	5
3.1 Distance à un sous-espace vectoriel dans un espace euclidien	5
3.2 Pseudo-solutions d'un système linéaire	6

DÉFINITION 0.1 On appelle **espace euclidien** tout espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

Dans tout ce chapitre, E désigne un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geq 1$. On notera $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire sur E et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

1. Bases orthonormales

On commence par rappeler quelques points du chapitre précédent.

DÉFINITION 1.1 On appelle **base orthonormale** (ou **base orthonormée**) de E toute famille orthonormale qui est une base de E , i.e. toute base (e_1, \dots, e_n) de E telle que :

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}.$$

Exemples 1.2 La base canonique de \mathbb{R}^n en est une base orthonormale pour le produit scalaire canonique. En particulier, la famille $((1, 0), (0, 1))$ est une base orthonormale de \mathbb{R}^2 . Pour $\theta \in \mathbb{R}$ donné, les vecteurs $\vec{u}_\theta = (\cos \theta, \sin \theta)$ et $\vec{v}_\theta = \vec{u}_{\theta+\pi/2} = (-\sin \theta, \cos \theta)$ forment également une base orthonormale de \mathbb{R}^2 . Représenter ces vecteurs sur une figure.

Remarque 1.3 Si une famille (e_1, \dots, e_n) est orthonormale, elle est automatiquement libre et comme elle est formée de $n = \dim E$ vecteurs, c'est une base de E , orthonormale par construction.

1.1 Expression du produit scalaire

Si \underline{e} désigne une base de E dans laquelle le produit scalaire est représenté (en tant que forme bilinéaire) par une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, alors le produit scalaire de deux vecteurs x et y de E s'exprime sous la forme

$$\langle x, y \rangle = {}^t X A Y = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} x_i y_j$$

où $X = {}^t (x_1 \ \dots \ x_n)$ et $Y = {}^t (y_1 \ \dots \ y_n)$ sont les colonnes des coordonnées de x et y en base \underline{e} .

LEMME 1.4 Une base \underline{e} de E est orthonormale si, et seulement si, le produit scalaire est représenté dans cette base par la matrice I_n .

Le produit scalaire s'exprime donc de façon particulièrement simple en base orthonormale :

THÉORÈME 1.5 (EXPRESSION DU PRODUIT SCALAIRE ET DE LA NORME EN BASE ORTHONORMALE) On suppose E rapporté à une base \underline{e} orthonormale.

Soient x et y deux vecteurs de E , ainsi que $X = {}^t (x_1 \ \dots \ x_n)$ et $Y = {}^t (y_1 \ \dots \ y_n)$ les colonnes de leurs coordonnées en base \underline{e} .

On a :

$$\langle x, y \rangle = {}^t X Y = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = {}^t X X = \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

COROLLAIRE 1.6 (COORDONNÉES D'UN VECTEUR EN BASE ORTHONORMALE) On suppose E rapporté à une base \underline{e} orthonormale.

Soit x un vecteur de E . Ses coordonnées x_1, \dots, x_n en base \underline{e} sont données par :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad x_i = \langle e_i, x \rangle.$$

Remarque 1.7 En d'autres termes, si \underline{e} est une base orthonormale de E , alors :

$$\forall x \in E, \quad x = \sum_{i=1}^n \langle e_i, x \rangle e_i$$

et les formules du théorème 1.5 deviennent :

$$\forall x, y \in E, \quad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \langle e_i, x \rangle \langle e_i, y \rangle, \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle e_i, x \rangle^2.$$

Remarque 1.8 Soient u un endomorphisme de E et \underline{e} une base orthonormale de E . Les coefficients $a_{i,j}, 1 \leq i, j \leq n$, de la matrice A représentant u en base \underline{e} sont donnés par :

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad a_{i,j} = \langle e_i, u(e_j) \rangle.$$

1.2 Existence de bases orthonormales

THÉORÈME 1.9 *Tout espace euclidien admet (au moins) une base orthonormale.*

PROPOSITION 1.10 *Soit \underline{e} une base orthonormale de E , \underline{e}' une autre base de E et P la matrice de passage de \underline{e} à \underline{e}' .*

La base \underline{e}' est orthonormale si, et seulement si, la matrice P est orthogonale i.e. vérifie $P^{-1} = {}^tP$ (cf. définition suivante).

PROPOSITION-DÉFINITION 1.11 *Une matrice $P \in M_n(\mathbb{R})$ est dite **orthogonale** si elle vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :*

- (i) ${}^tPP = P{}^tP = I_n$;
- (ii) la matrice P est inversible et $P^{-1} = {}^tP$;
- (iii) les colonnes de P forment une base orthonormale de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ euclidien canonique.

1.3 Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

On renvoie aux TD pour l'énoncé du problème et les détails de sa résolution.

THÉORÈME 1.12 (ORTHONORMALISATION DE GRAM-SCHMIDT) *Soit $\underline{u} = (u_1, \dots, u_r)$ une famille libre de E . Il existe une famille orthonormale $\underline{v} = (v_1, \dots, v_r)$ de vecteurs de E telle que :*

$$\forall k \in \llbracket 1, r \rrbracket, \quad \text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_k) = \text{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_k). \tag{1.1}$$

Une telle famille est unique si l'on impose de plus $\langle v_k, u_k \rangle > 0$ pour tout $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$.

Remarques 1.13 • La condition (1.1) signifie que pour tout $k \in \llbracket 1, r \rrbracket, (v_1, \dots, v_r)$ est une base orthonormale du sous-espace $\text{Vect}(u_1, \dots, u_r)$.

- L'application du procédé de Gram-Schmidt à une base de E permet d'en construire une base orthonormale.

2. Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace vectoriel

2.1 Théorème fondamental

THÉORÈME 2.1 *Soit F un sous-espace vectoriel de E .*

Le sous-espace vectoriel F^\perp est supplémentaire de F :

$$E = F \oplus F^\perp.$$

*On dit dans ces conditions que F^\perp est le **supplémentaire orthogonal** de F .*

www.rb11d.fr

COROLLAIRE 2.2 Soit F un sous-espace vectoriel de E . On a :

$$\dim F^\perp = \dim E - \dim F.$$

COROLLAIRE 2.3 Soit F un sous-espace vectoriel de E . On a :

$$(F^\perp)^\perp = F.$$

Remarque 2.4 Comme on l'a déjà signalé dans le chapitre précédent, les résultats de cette section sont faux lorsque E n'est pas de dimension finie. Des contre-exemples seront étudiés en travaux dirigés.

2.2 Premières conséquences

PROPOSITION 2.5 (i) Toute famille libre orthogonale peut être complétée en une base orthogonale de E .

(ii) Toute famille orthonormale peut être complétée en une base orthonormale de E .

PROPOSITION 2.6 On suppose E rapporté à une base orthonormale \underline{e} .

Soit H un hyperplan de E d'équation

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$$

en base \underline{e} (où a_1, \dots, a_n sont des réels non tous nuls donnés).

L'orthogonal de H est la droite dirigée par le vecteur a de coordonnées (a_1, \dots, a_n) en base \underline{e} .

2.3 Projecteurs orthogonaux

On se donne dans cette section un sous-espace vectoriel F de E . D'après le théorème 2.1, les sous-espaces vectoriels F et F^\perp sont supplémentaires dans E , ce qui justifie la définition suivante.

DÉFINITION 2.7 On appelle **projection orthogonale** sur F , et on note p_F , la projection sur F parallèlement à F^\perp .

Remarques 2.8 • Le projeté orthogonal $p_F(x)$ d'un vecteur $x \in E$ sur le sous-espace F est donc caractérisé par les conditions :

$$\begin{cases} p_F(x) \in F \\ x - p_F(x) \perp F \end{cases}.$$

- Une projection p de E est une projection orthogonale si, et seulement si, les sous-espaces $\text{Im } p$ et $\text{Ker } p$ sont orthogonaux.
- Les projecteurs p_F et p_{F^\perp} sont associés, ce qui explique que $p_F + p_{F^\perp} = \text{id}_E$.

PROPOSITION 2.9 Soit $\underline{v} = (v_1, \dots, v_r)$ une base orthonormale de F .

On a :

$$\forall x \in E, \quad p_F(x) = \sum_{i=1}^r \langle v_i, x \rangle v_i.$$

Exemples 2.10 • Soit D une droite vectorielle de E , dirigée par un vecteur $a \in E \setminus \{0\}$. Exprimer le projeté orthogonal d'un vecteur x de E sur D .

- Soit H un hyperplan de E ; d'après le corollaire 2.3, son orthogonal est une droite $D = H^\perp$ dirigée par un vecteur n . Exprimer le projeté orthogonal d'un vecteur x de E sur H .

COROLLAIRE 2.11 On suppose l'espace euclidien E rapporté à une base orthonormale \underline{e} . Soit $\underline{v} = (v_1, \dots, v_r)$ une base orthonormale de F . La projection orthogonale p_F sur F est représentée en base \underline{e} par la matrice

$$P_F = \sum_{i=1}^r V_i^t V_i$$

où V_1, \dots, V_r sont les colonnes des coordonnées des vecteurs v_1, \dots, v_r en base \underline{e} .

Remarque 2.12 Si l'on dispose seulement d'une base orthogonale (e_1, \dots, e_r) de F , alors la formule de la proposition 2.9 s'adapte facilement :

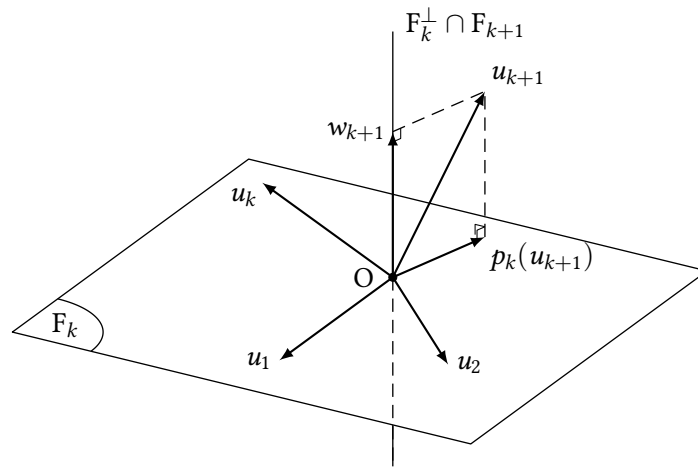
$$\forall x \in E, \quad p_F(x) = \sum_{i=1}^r \frac{\langle e_i, x \rangle}{\|e_i\|^2} e_i.$$

On reconnaît une formule apparue dans le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt (cf. TD) appliqué à une famille libre (u_1, \dots, u_r) pour obtenir une base orthogonale (w_1, \dots, w_r) de $\text{Vect}(u_1, \dots, u_r)$. Après la k -ième étape, le vecteur w_{k+1} est défini par

$$w_{k+1} = u_{k+1} - \sum_{i=1}^k \frac{\langle w_i, u_{k+1} \rangle}{\|w_i\|^2} w_i = u_{k+1} - p_k(u_{k+1})$$

où $p_k(u_{k+1})$ est le projeté orthogonal de u_{k+1} sur $F_k = \text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$ car (w_1, \dots, w_k) constitue par hypothèse de récurrence une base orthogonale de F_k .

La technique consiste donc à « redresser » le vecteur u_{k+1} : celui-ci se décompose en effet sous la forme $u_{k+1} = p_k(u_{k+1}) + w_{k+1}$ avec $p_k(u_{k+1}) \in F_k$ et $w_{k+1} \perp F_k$.



3. Application aux problèmes de minimisation

3.1 Distance à un sous-espace vectoriel dans un espace euclidien

Soit F un sous-espace vectoriel de E .

PROPOSITION 3.1 Soit $x \in E$.

On a :

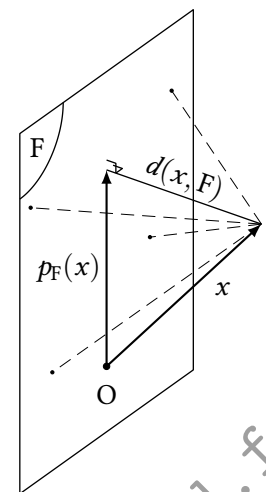
$$\forall y \in F, \quad \|x - p_F(x)\| \leq \|x - y\|,$$

avec égalité si, et seulement si, $y = p_F(x)$.

En d'autres termes, le projeté orthogonal $p_F(x)$ de x sur F est l'unique vecteur de F minimisant la distance à x .

Remarque 3.2 Avec les notations précédentes, on dit que $p_F(x)$ est la meilleure approximation de x dans F . On appelle *distance* de x à F le réel

$$d(x, F) = \min_{y \in F} \|x - y\|.$$



COROLLAIRE 3.3 Pour tout $x \in E$, on a :

$$\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + d(x, F)^2 \geq \|p_F(x)\|^2.$$

Exemples 3.4 Exprimer la distance d'un vecteur $x \in E$ à une droite D dirigée par un vecteur $a \neq 0$ puis à un hyperplan H de vecteur normal $n \neq 0$.

www.rblld.fr

3.2 Pseudo-solutions d'un système linéaire

On munit $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique.

THÉORÈME 3.5 Soient $n \geq p$ deux entiers strictement positifs, $A \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang p et $B \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Il existe un et un seul vecteur $X \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ minimisant la quantité $\|AX - B\|$. Ce vecteur est l'unique solution du système de Cramer ${}^tAAX = {}^tAB$.

Remarque 3.6 L'unique vecteur X du théorème précédent est ce qui se rapproche le plus, au sens des moindres carrés (i.e. de la norme euclidienne) d'une solution du système linéaire $AX = B$; on parle de *pseudo-solution*.

On renvoie au TD pour des explications plus détaillées, la démonstration et un exemple d'application.