

## LOIS CONTINUES CLASSIQUES

<b>1</b>	<b>Loi uniforme</b>	<b>2</b>
1.1	Description et transformations affines . . . . .	2
1.2	Moments . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Loi exponentielle</b>	<b>3</b>
2.1	Description et transformations linéaires . . . . .	3
2.2	Moments . . . . .	3
2.3	Caractérisation par l'absence de mémoire . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Loi gamma</b>	<b>4</b>
3.1	Description . . . . .	4
3.2	Moments . . . . .	4
3.3	Stabilité . . . . .	4
<b>4</b>	<b>Loi normale ou gaussienne</b>	<b>5</b>
4.1	Description et transformations affines . . . . .	5
4.2	Étude de la loi normale centrée réduite . . . . .	5
4.3	Moments . . . . .	6
4.4	Stabilité . . . . .	6

Dans tout le chapitre,  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  désigne un espace de probabilité.

## 1. Loi uniforme

Dans tout ce paragraphe,  $a < b$  désignent deux réels.

### 1.1 Description et transformations affines

**DÉFINITION 1.1** On dit qu'une variable aléatoire réelle  $X$  suit une loi uniforme sur l'intervalle  $[a, b]$ , et l'on note  $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$ , si  $X$  admet pour densité la fonction

$$f_X : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

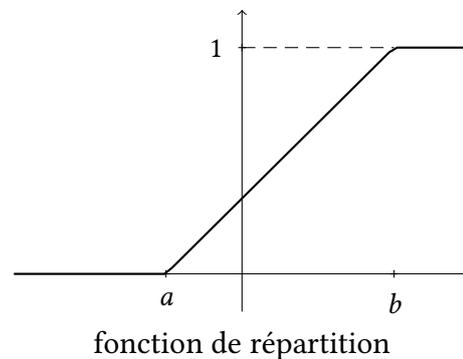
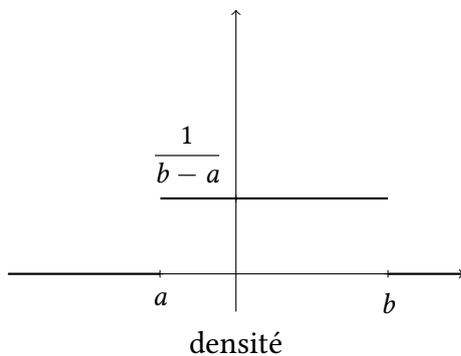
**Remarque 1.2** La loi précédente est qualifiée d'*uniforme* car si  $X$  suit la loi  $\mathcal{U}([a, b])$ , la probabilité que  $X$  appartienne à un intervalle  $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$  donné ( $\alpha < \beta$ ) ne dépend que de la longueur  $\beta - \alpha$  de celui-ci.

**PROPOSITION 1.3** Soit  $X$  une variable aléatoire de loi  $\mathcal{U}([a, b])$ .

La variable aléatoire  $X$  admet pour fonction de répartition

$$F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases} .$$

Ci-dessous les représentations de la densité et de la fonction de répartition de la loi uniforme  $\mathcal{U}([a, b])$ .



**PROPOSITION 1.4** Soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  et  $X$  une variable aléatoire réelle.

Si  $X$  suit une loi  $\mathcal{U}([a, b])$  et  $\alpha > 0$ , alors  $\alpha X + \beta$  suit une loi  $\mathcal{U}([\alpha a + \beta, \alpha b + \beta])$ .

### 1.2 Moments

**PROPOSITION 1.5** Soit  $X$  une variable aléatoire de loi  $\mathcal{U}([a, b])$ .

On a :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12} .$$

## 2. Loi exponentielle

### 2.1 Description et transformations linéaires

DÉFINITION 2.1 On dit qu'une variable aléatoire réelle  $X$  suit une **loi exponentielle** de paramètre  $\lambda > 0$ , et l'on note  $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$  si elle admet pour densité la fonction

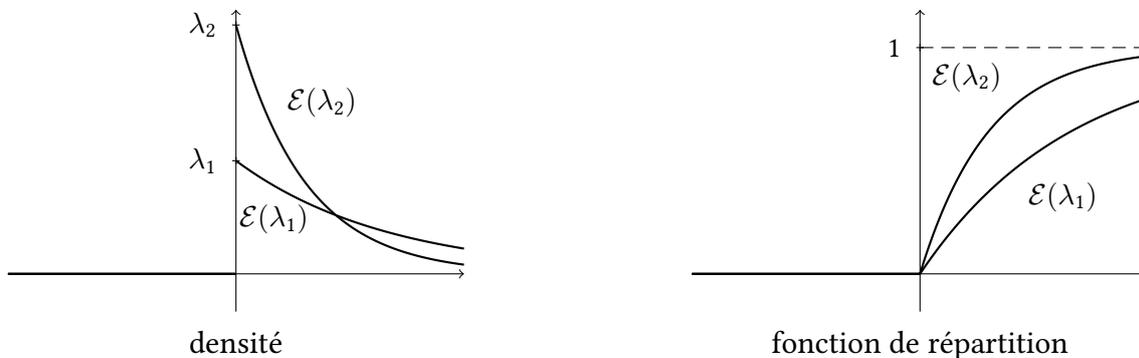
$$f_X : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} .$$

PROPOSITION 2.2 Soit  $X$  une variable aléatoire de loi  $\mathcal{E}(\lambda)$ ,  $\lambda > 0$ .

La variable aléatoire  $X$  admet pour fonction de répartition

$$F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} .$$

Ci-dessous les représentations de la densité et de la fonction de répartition de deux lois exponentielles  $\mathcal{E}(\lambda_1)$  et  $\mathcal{E}(\lambda_2)$  avec  $\lambda_1 < \lambda_2$ . On constate que plus  $\lambda$  est grand, plus la variable est concentrée au voisinage de 0 (à droite).



PROPOSITION 2.3 Soient  $\lambda > 0$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $X$  une variable aléatoire réelle.

Si  $X$  suit une loi  $\mathcal{E}(\lambda)$  et  $\alpha > 0$ , alors  $\alpha X$  suit une loi  $\mathcal{E}(\lambda/\alpha)$ .

### 2.2 Moments

PROPOSITION 2.4 Soit  $X$  une variable aléatoire de loi  $\mathcal{E}(\lambda)$ ,  $\lambda > 0$ .

On a :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2} .$$

### 2.3 Caractérisation par l'absence de mémoire

THÉORÈME 2.5 Une variable aléatoire réelle  $X$  suit une loi exponentielle si, et seulement si,  $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$ ,  $\mathbb{P}(X > x) > 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$  et :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+, \quad \mathbb{P}_{[X>y]}(X > x + y) = \mathbb{P}(X > x). \quad (2.1)$$

Remarque 2.6 On interprète la condition (2.1) en disant que  $X$  suit une loi sans mémoire.

### 3. Loi gamma

#### 3.1 Description

LEMME 3.1 Pour  $\nu > 0$ , la fonction

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \frac{x^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

est une densité de probabilité.

DÉFINITION 3.2 Soient  $X$  une variable aléatoire réelle et  $\nu > 0$ .

On dit que  $X$  suit une loi  $\gamma$  de paramètre  $\nu$ , et l'on note  $X \hookrightarrow \gamma(\nu)$ , si elle admet la fonction (3.1) pour densité.

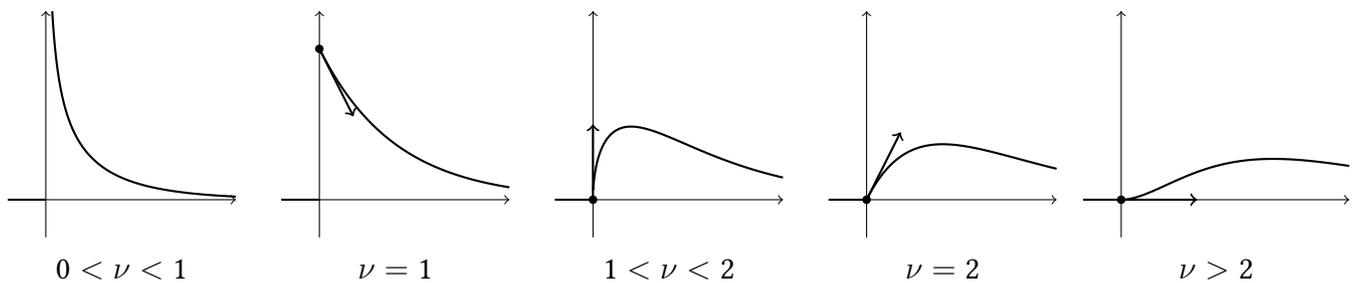
Remarques 3.3 • Pour  $b, \nu > 0$  et  $X$  une variable aléatoire de loi  $\gamma(\nu)$ , la variable  $bX$  est à densité donnée par

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \frac{x^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)b^\nu} e^{-x/b} = \frac{1}{b\Gamma(\nu)} \left(\frac{x}{b}\right)^{\nu-1} e^{-x/b} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$

Cette loi (hors-programme) est notée  $\Gamma(b, \nu)$  et le réel  $b$  est appelé paramètre d'échelle. La loi  $\gamma(\nu)$  est parfois appelée loi  $\gamma$ -standard par opposition aux lois  $\Gamma$  générales.

- La loi exponentielle  $\mathcal{E}(\lambda)$  coïncide avec la loi  $\Gamma(\frac{1}{\lambda}, 1)$ . En particulier, la loi  $\mathcal{E}(1)$  coïncide avec la loi  $\gamma(1)$ .

Ci-dessous la représentation graphique de la densité de la loi  $\gamma(\nu)$  pour différentes valeurs de  $\nu$ .



#### 3.2 Moments

PROPOSITION 3.4 Soit  $X$  une variable aléatoire de loi  $\gamma(\nu)$ ,  $\nu > 0$ .

On a :

$$\mathbb{E}(X) = \nu \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \nu.$$

#### 3.3 Stabilité

THÉORÈME 3.5 Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux variables aléatoires de lois  $\gamma(\nu_1)$  et  $\gamma(\nu_2)$  avec  $\nu_1, \nu_2 > 0$ .

Si  $X_1$  et  $X_2$  sont indépendantes, alors la variable aléatoire  $X_1 + X_2$  suit la loi  $\gamma(\nu_1 + \nu_2)$ .

COROLLAIRE 3.6 Soient  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes.

(i) Si pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $X_i$  suit une loi  $\gamma(\nu_i)$ , alors  $X_1 + \dots + X_n$  suit la loi  $\gamma(\nu_1 + \dots + \nu_n)$ .

(ii) Si  $X_1, \dots, X_n$  suivent toutes la loi exponentielle  $\mathcal{E}(1)$ , alors  $X_1 + \dots + X_n$  suit la loi  $\gamma(n)$ .

Exemple 3.7 Déterminer une densité de  $X_1 + \dots + X_n$  lorsque  $X_1, \dots, X_n$  sont des variables indépendantes de loi  $\mathcal{E}(\lambda)$ ,  $\lambda > 0$ .

## 4. Loi normale ou gaussienne

### 4.1 Description et transformations affines

LEMME 4.1 Pour  $(m, \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ , la fonction

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - m)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{4.1}$$

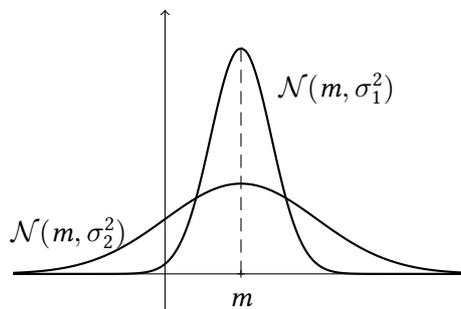
est une densité de probabilité.

DÉFINITION 4.2 Soit  $(m, \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ .

On dit qu'une variable aléatoire réelle  $X$  suit une **loi normale** (ou **loi gaussienne**) de paramètres  $(m, \sigma^2)$ , et l'on note  $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ , si  $X$  admet pour densité la fonction (4.1).

Remarque 4.3 Le programme définit la notation  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$  mais on rencontre aussi la notation  $\mathcal{N}(m, \sigma)$  pour désigner la loi précédente.

Ci-dessous la superposition des densités de deux lois normales  $\mathcal{N}(m, \sigma_1^2)$  et  $\mathcal{N}(m, \sigma_2^2)$  avec  $\sigma_1 < \sigma_2$  :



PROPOSITION 4.4 Soient  $(m, \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ ,  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$  et  $X$  une variable aléatoire réelle. Si  $X$  suit une loi normale  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ , alors  $\alpha X + \beta$  suit une loi normale  $\mathcal{N}(\alpha m + \beta, \alpha^2 \sigma^2)$ .

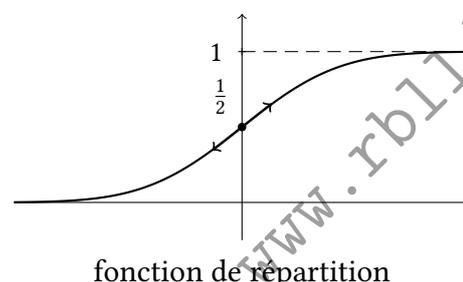
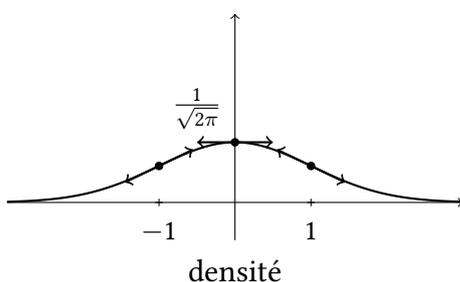
### 4.2 Étude de la loi normale centrée réduite

La loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$  est appelée **loi normale centrée réduite** (car elle est centrée réduite comme on le verra plus tard...). Elle a pour densité la fonction

$$f_{0,1} : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

PROPOSITION 4.5 La fonction  $f_{0,1}$  est paire, croissante sur  $\mathbb{R}_-$ , décroissante sur  $\mathbb{R}_+$ . Elle est convexe sur les intervalles  $]-\infty, -1[$  et  $]1, +\infty[$  et concave sur l'intervalle  $[-1, 1]$ . Sa courbe représentative présente une tangente horizontale au point d'abscisse 0.

Ci-dessous les représentations graphiques de la densité  $f$  et de la fonction de répartition de la loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$  :



On note  $\Phi$  la fonction de répartition associée à la loi normale centrée réduite :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt.$$

C'est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

PROPOSITION 4.6 On a  $\Phi(0) = 1/2$  et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$

*Remarque 4.7* La propriété précédente signifie que la courbe représentative de  $\Phi$  est symétrique par rapport au point de coordonnées  $(0, 1/2)$ . Ce centre de symétrie est aussi point d'inflexion de la courbe, la fonction  $\Phi$  étant convexe sur  $\mathbb{R}_-$  et concave sur  $\mathbb{R}_+$ .

### 4.3 Moments

THÉORÈME 4.8 Soit  $X$  une variable aléatoire suivant une loi normale  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$  où  $\sigma > 0$ .

On a :

$$\mathbb{E}(X) = m, \quad \mathbb{V}(X) = \sigma^2, \quad \sigma(X) = \sigma.$$

### 4.4 Stabilité

THÉORÈME 4.9 Soient  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires réelles où pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $X_i$  suit une loi normale  $\mathcal{N}(m_i, \sigma_i^2)$ .

Si les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  sont mutuellement indépendantes, alors  $X_1 + \dots + X_n$  suit la loi normale  $\mathcal{N}(m_1 + \dots + m_n, \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2)$ .