

PRODUIT SCALAIRE ET ORTHOGONALITÉ

1	Formes bilinéaires	2
1.1	Définition	2
1.2	Représentation matricielle	2
1.3	Formes bilinéaires symétriques, positives, définies-positives	3
2	Produits scalaires	4
2.1	Définition	4
2.2	Exemples usuels de produits scalaires	4
2.3	Norme euclidienne associée à un produit scalaire	5
3	Orthogonalité	6
3.1	Vecteurs orthogonaux	6
3.2	Orthogonal d'un sous-espace	7
3.3	Sous-espaces orthogonaux	8

Dans tout ce chapitre, E désigne un espace vectoriel réel (qu'on ne suppose pas nécessairement de dimension finie, sauf mention expresse du contraire).

1. Formes bilinéaires

1.1 Définition

DÉFINITION 1.1 On appelle **forme bilinéaire** sur E toute application $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

(i) pour tout $y \in E$, l'application $x \in E \longmapsto \varphi(x, y)$ est linéaire :

$$\forall (x, x') \in E^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x + \lambda x', y) = \varphi(x, y) + \lambda \varphi(x', y);$$

(ii) pour tout $x \in E$, l'application $y \in E \longmapsto \varphi(x, y)$ est linéaire :

$$\forall (y, y') \in E^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x, y + \lambda y') = \varphi(x, y) + \lambda \varphi(x, y').$$

Remarque 1.2 On prendra soin de ne pas confondre la *bilinéarité* avec la *linéarité*. On pourra par exemple comparer les développements de $\varphi(\lambda x, \lambda y)$ ou $\varphi(x + x', y + y')$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $x, x', y, y' \in E$ lorsque $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ est linéaire puis bilinéaire.

Exemples 1.3 Les applications suivantes sont des formes bilinéaires :

(i) l'application $(x, y) \longmapsto xy$ sur \mathbb{R} ;

(ii) l'application $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \longmapsto x_1 y_2 - x_2 y_1$ sur \mathbb{R}^2 ;

(iii) l'application

$$((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \longmapsto \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

sur \mathbb{R}^n ;

(iv) l'application $(X, Y) \longmapsto \text{cov}(X, Y)$ sur l'espace vectoriel $\mathbf{L}_d^2(\Omega)$ des variables aléatoires réelles discrètes (sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ donné) admettant une variance ;

(v) l'application

$$(P, Q) \longmapsto \int_0^1 P(t)Q(t) dt$$

sur $\mathbb{R}_n[X]$;

(vi) pour $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ donnée, l'application $(X, Y) \longmapsto {}^t XAY$ sur l'espace vectoriel $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

LEMME 1.4 Soit φ une forme bilinéaire sur E . On a :

(i) pour tout $x \in E$, $\varphi(x, 0) = \varphi(0, x) = 0$;

(ii) pour tous $x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_s \in E$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_r, \mu_1, \dots, \mu_s \in \mathbb{R}$,

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^r \lambda_i x_i, \sum_{j=1}^s \mu_j y_j\right) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq s}} \lambda_i \mu_j \varphi(x_i, y_j).$$

1.2 Représentation matricielle

On suppose dans cette section que l'espace vectoriel E est de dimension finie $n \geq 1$. On se donne une forme bilinéaire φ sur E ainsi qu'une base $\underline{e} = (e_1, \dots, e_n)$ de E .

DÉFINITION 1.5 On appelle **matrice représentative** de φ dans la base \underline{e} , et l'on note $\text{Mat}(\varphi, \underline{e})$, la matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficient générique :

$$a_{i,j} = \varphi(e_i, e_j), \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Exemples 1.6 Déterminer les matrices représentant les formes bilinéaires suivantes dans la base indiquée :

(i) la forme bilinéaire $(x, y) \longmapsto xy$ sur \mathbb{R} en base canonique ;

(ii) la forme bilinéaire $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \longmapsto x_1 y_2 - x_2 y_1$ sur \mathbb{R}^2 en base canonique ;

- (iii) la forme bilinéaire $(P, Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t) dt$ sur $\mathbb{R}_n[X]$ en base canonique ;
 (iv) la forme bilinéaire $(x, y) \mapsto \sum_i x_i y_i$ sur \mathbb{R}^n en base canonique $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ puis dans la base (e_1, \dots, e_n) où $e_i = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

THÉORÈME 1.7 La matrice A représentative de φ en base \underline{e} est caractérisée par la condition suivante : pour tous vecteurs $x, y \in E$ représentés en base \underline{e} par les matrices colonnes X et Y , on a :

$$\varphi(x, y) = {}^t XAY.$$

Remarque 1.8 On déduit du théorème précédent que les formes bilinéaires sur E forment un espace vectoriel isomorphe à $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ par l'application $\varphi \mapsto \text{Mat}(\varphi, \underline{e})$, qui est donc de dimension n^2 .

Remarque 1.9 Étant donnée une matrice $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, l'application $\varphi_A : (X, Y) \mapsto {}^t XAY$ est une forme bilinéaire sur $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ représentée en base canonique par la matrice A . On l'appelle la forme bilinéaire **canoniquement associée** à A .

PROPOSITION 1.10 (RAPPELS SUR LA TRANSPOSITION) L'application $\mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{R}), M \mapsto {}^t M$ est linéaire et vérifie les propriétés suivantes :

- (i) pour tous $M \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $N \in \mathbf{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, ${}^t(MN) = {}^t N {}^t M$;
 (ii) pour toute matrice $P \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ inversible, ${}^t P$ est inversible et $({}^t P)^{-1} = {}^t(P^{-1})$.

THÉORÈME 1.11 (FORMULE DE CHANGEMENT DE BASE) Si \underline{e} et \underline{e}' sont deux bases de E , P la matrice de passage de \underline{e} à \underline{e}' , alors les matrices A et A' représentant respectivement φ en bases \underline{e} et \underline{e}' sont liées par la formule :

$$A' = {}^t P A P.$$

1.3 Formes bilinéaires symétriques, positives, définies-positives

DÉFINITION 1.12 On dit qu'une forme bilinéaire φ sur E est :

- **symétrique** si : pour tous $x, y \in E$, $\varphi(y, x) = \varphi(x, y)$;
- **positive** si : pour tout $x \in E$, $\varphi(x, x) \geq 0$;
- **définie-positive** si : pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, $\varphi(x, x) > 0$.

Remarque 1.13 On notera qu'une forme bilinéaire définie-positive est automatiquement positive. D'ailleurs on justifie souvent qu'une forme bilinéaire φ est définie-positive en montrant d'abord que φ est positive, i.e. que $\varphi(x, x) \geq 0$ pour tout $x \in E$, puis en vérifiant que $\varphi(x, x) = 0 \implies x = 0$.

Exemples 1.14 (i) La forme bilinéaire $(x, y) \mapsto xy$ sur \mathbb{R} est symétrique définie-positive.

(ii) La forme bilinéaire $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto x_1 y_2 - x_2 y_1$ sur \mathbb{R}^2 n'est pas symétrique, est positive mais pas définie-positive.

(iii) La forme bilinéaire $(x, y) \mapsto \sum_i x_i y_i$ sur \mathbb{R}^n est symétrique définie-positive.

(iv) La forme bilinéaire $(P, Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t) dt$ sur $\mathbb{R}_n[X]$ est symétrique définie-positive.

(v) La forme bilinéaire cov sur $\mathbf{L}_d^2(\Omega)$ est symétrique positive mais pas définie-positive.

PROPOSITION 1.15 On suppose l'espace vectoriel E de dimension finie. Soit φ une forme bilinéaire sur E . Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) la forme bilinéaire φ est symétrique ;
 (ii) la forme bilinéaire φ est représentée par une matrice symétrique dans une base de E ;
 (iii) la forme bilinéaire φ est représentée par une matrice symétrique dans toute base de E .

Remarque 1.16 Une matrice $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique est dite positive (resp. définie-positive) si la forme bilinéaire sur $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui lui est canoniquement associée est positive (resp. définie-positive).

PROPOSITION 1.17 (INÉGALITÉ DE CAUCHY-SCHWARZ) Soit φ une forme bilinéaire symétrique positive sur E . On a :

$$\forall x, y \in E, \quad |\varphi(x, y)| \leq \sqrt{\varphi(x, x)}\sqrt{\varphi(y, y)}.$$

Si de plus φ est définie-positive, alors on a égalité dans l'inégalité précédente si, et seulement si, la famille (x, y) est liée.

Exemple 1.18 Pour deux variables aléatoires réelles discrètes X et Y admettant une variance, on a :

$$|\text{cov}(X, Y)| \leq \sigma(X)\sigma(Y).$$

2. Produits scalaires

2.1 Définition

DÉFINITION 2.1 On appelle **produit scalaire** sur E toute forme bilinéaire symétrique définie-positive sur E , i.e. toute application $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés :

- (i) pour tous $x, x', y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi(x + \lambda x', y) = \varphi(x, y) + \lambda\varphi(x', y)$;
- (ii) pour tous $x, y, y' \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi(x, y + \lambda y') = \varphi(x, y) + \lambda\varphi(x, y')$;
- (iii) pour tous $x, y \in E$, $\varphi(y, x) = \varphi(x, y)$;
- (iv) pour tout $x \in E$, $\varphi(x, x) \geq 0$;
- (v) pour tout $x \in E$, $\varphi(x, x) = 0 \implies x = 0$.

Remarque 2.2 Les conditions de la définition précédente sont redondantes : la propriété (ii) découle en effet des propriétés (i) et (iii). En pratique, on pourra donc se contenter de vérifier la linéarité à gauche, la symétrie puis de signaler que ces propriétés entraînent la linéarité à droite.

Remarque 2.3 Le produit scalaire $\varphi(x, y)$ de deux vecteurs $x, y \in E$ est souvent noté $x \cdot y$, $(x|y)$, $\langle x, y \rangle$ ou $\langle x|y \rangle$.

Remarque 2.4 En tant que forme bilinéaire symétrique, un produit scalaire est représenté dans chaque base de E par une matrice symétrique.

2.2 Exemples usuels de produits scalaires

PROPOSITION 2.5 L'application qui, à un couple (x, y) d'éléments $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ de \mathbb{R}^n , associe

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

est un produit scalaire sur \mathbb{R}^n , appelé le **produit scalaire canonique** sur \mathbb{R}^n .

Exemple 2.6 • Plus généralement, si E est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie n rapporté à une base \underline{e} , alors l'application qui à un couple (x, y) de vecteurs de E de coordonnées respectives (x_1, \dots, x_n) et (y_1, \dots, y_n) dans la base \underline{e} , associe

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

est un produit scalaire sur E .

Si l'espace E admet une base canonique, le produit scalaire qui lui est ainsi associé est lui aussi qualifié de canonique.

- Ainsi, l'application qui, à un couple (X, Y) de matrices colonnes $X = {}^t(x_1 \ \dots \ x_n)$ et $Y = {}^t(y_1 \ \dots \ y_n)$ de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, associe

$$\langle X, Y \rangle = {}^tXY = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

est un produit scalaire sur $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: le produit scalaire canonique sur $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Exemple 2.7 Montrer que l'application

$$(A, B) \mapsto \langle A, B \rangle = \text{tr}({}^tAB)$$

est un produit scalaire sur $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

PROPOSITION 2.8 Soient $a < b$ deux réels.

L'application

$$(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t) dt$$

est un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ des fonctions réelles continues sur le segment $[a, b]$. On parle du produit scalaire usuel sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

2.3 Norme euclidienne associée à un produit scalaire

Dans toute la section, on suppose l'espace vectoriel E muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

DÉFINITION 2.9 On appelle **norme euclidienne** associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ l'application $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par :

$$\forall x \in E, \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Remarque 2.10 La norme d'un vecteur de E représente sa *longueur*.

Il existe un autre point de vue sur les éléments de E , que l'on peut considérer comme des points. La distance $d(x, y)$ entre deux points x et y de E sera alors la norme du vecteur $\overrightarrow{xy} = y - x$: $d(x, y) = \|y - x\|$. On définit ainsi une fonction **distance euclidienne** $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$ par :

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad d(x, y) = \|y - x\|.$$

Exemples 2.11 • Les normes euclidiennes associées aux produits scalaires canoniques sur les espaces \mathbb{R}^n , $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ sont données par :

$$x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \sqrt{{}^tXX} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \mapsto \sqrt{\text{tr}({}^tAA)} = \sqrt{\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2}$.

• La norme euclidienne associée au produit scalaire usuel sur l'espace $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ ($a < b$ réels) est donnée par :

$$f \mapsto \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt}.$$

PROPOSITION 2.12 (INÉGALITÉ DE CAUCHY-SCHWARZ) Pour tous $x, y \in E$, on a :

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

avec égalité si, et seulement si, la famille (x, y) est liée.

Exemples 2.13 Écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans \mathbb{R}^n et $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ munis de leur produit scalaire canonique ou usuel.

PROPOSITION 2.14 La norme vérifie les propriétés suivantes :

- > *séparation* : pour tout $x \in E$, $\|x\| = 0 \iff x = 0$;
- > *homogénéité* : pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;
- > *inégalité triangulaire* : pour tous $x, y \in E$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Remarque 2.15 La relation

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2 \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + 2 \langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

est souvent utile en pratique ; elle permet par exemple de démontrer les identités de polarisation et du parallélogramme qui font l'objet de la proposition suivante.

Plus généralement, pour une famille (x_1, \dots, x_r) de vecteurs de E , on a :

$$\left\| \sum_{i=1}^r x_i \right\|^2 = \sum_{1 \leq i, j \leq r} \langle x_i, x_j \rangle = \sum_{i=1}^r \|x_i\|^2 + \sum_{1 \leq i \neq j \leq r} \langle x_i, x_j \rangle = \sum_{i=1}^r \|x_i\|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq r} \langle x_i, x_j \rangle.$$

L'identité suivante peut également être utile :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \|y\|^2 - \|x\|^2 = \langle y - x, y + x \rangle.$$

PROPOSITION 2.16 Pour tous $x, y \in E$, on a les formules :

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) \quad (2.1)$$

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} (\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2) \quad (2.2)$$

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) \quad (2.3)$$

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \quad (2.4)$$

Remarque 2.17 • Les formules (2.1), (2.2) et (2.3) sont appelées *identités de polarisation* ; elles expriment le produit scalaire de deux vecteurs x et y à partir de la norme de vecteurs construits sur x et y .

- Si A, B, C sont trois points de E , alors la formule (2.1) appliquée aux vecteurs $x = \overrightarrow{AC}$ et $y = \overrightarrow{CB}$ permet de retrouver la formule d'Al-Kashi :

$$\begin{aligned} AB^2 &= AC^2 + CB^2 + 2(\overrightarrow{AC} | \overrightarrow{CB}) \\ &= AC^2 + CB^2 - 2AC \cdot CB \cdot \cos \langle \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB} \rangle. \end{aligned}$$

- La formule (2.4) est connue sous le nom d'*identité du parallélogramme* : étant donnés quatre points coplanaires A, B, C, D de E formant un parallélogramme, la somme des carrés des quatre côtés du parallélogramme $ABCD$ est égale à la somme des carrés des deux diagonales :

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2.$$

On la connaît également sous le nom de *formule de la médiane* : étant donnés trois points A, B, C de E et I milieu du segment BC ,

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}.$$

Remarque 2.18 Il existe des normes, i.e. des applications $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant les conditions de séparation, homogénéité et inégalité triangulaire mises en évidence dans la proposition 2.14, qui ne sont pas définies par un produit scalaire. Elles ne vérifient pas l'identité du parallélogramme.

3. Orthogonalité

Dans tout ce paragraphe, on suppose l'espace vectoriel E muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

3.1 Vecteurs orthogonaux

DÉFINITION 3.1 • On dit que deux vecteurs x et y de E sont **orthogonaux**, et l'on note $x \perp y$, si $\langle x, y \rangle = 0$.

- Une famille (x_1, \dots, x_r) de vecteurs de E est dite **orthogonale** si les vecteurs de cette famille sont deux-à-

deux orthogonaux :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, r \rrbracket^2, \quad i \neq j \implies \langle x_i, x_j \rangle = 0.$$

Exemples 3.2 (i) Tout vecteur de E est orthogonal au vecteur nul.

(ii) Dans \mathbb{R}^4 muni de son produit scalaire canonique, les vecteurs $(1, 2, 3, 4)$ et $(-4, -3, 2, 1)$ sont orthogonaux.

(iii) Dans $\mathbb{R}_2[X]$, les vecteurs X et $X^2 - 1$ sont orthogonaux pour le produit scalaire canonique mais pas pour le produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$.

Remarque 3.3 En s'appuyant sur le produit scalaire, on peut plus généralement introduire une notion d'angle non orienté entre deux vecteurs x et y non nuls de E ; en effet, puisque

$$\left| \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} \right| \leq 1$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on peut définir l'écart angulaire entre les vecteurs x et y comme l'unique réel $\theta \in [0, \pi]$ tel que

$$\cos \theta = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}.$$

La condition d'orthogonalité entre x et y signifie alors que $\theta = \pi/2$.

PROPOSITION 3.4 Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls de E est libre.

PROPOSITION 3.5 (THÉORÈME DE PYTHAGORE) (i) Deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux si, et seulement si,

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

(ii) Plus généralement, si une famille (x_1, \dots, x_r) de vecteurs de E est orthogonale, alors on a :

$$\left\| \sum_{i=1}^r x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^r \|x_i\|^2.$$

La réciproque est fautive dès que $r \geq 3$.

DÉFINITION 3.6 • Un vecteur x de E est dit **normé** ou **unitaire** si $\|x\| = 1$.

• Une famille (x_1, \dots, x_r) de vecteurs de E est dite **orthonormale** ou **orthonormée** si elle est orthogonale et formée de vecteurs unitaires de E :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, r \rrbracket^2, \quad \langle x_i, x_j \rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}.$$

Remarque 3.7 D'après la proposition 3.4, toute famille orthonormale de E est libre.

En particulier, dans un espace vectoriel de dimension n , toute famille orthonormale formée de n vecteurs de E est une base de E , appelée **base orthonormale** de E .

Exemples 3.8 La base canonique de \mathbb{R}^n en est une base orthonormale pour le produit scalaire canonique. En particulier, la famille $((1, 0), (0, 1))$ est une base orthonormale de \mathbb{R}^2 . Pour $\theta \in \mathbb{R}$, les vecteurs $\vec{u}_\theta = (\cos \theta, \sin \theta)$ et $\vec{v}_\theta = \vec{u}_{\theta+\pi/2} = (-\sin \theta, \cos \theta)$ forment également une base orthonormale de \mathbb{R}^2 . Représenter ces vecteurs sur une figure.

3.2 Orthogonal d'un sous-espace

DÉFINITION 3.9 Soit F un sous-espace vectoriel de E .

• On dit qu'un vecteur x de E est orthogonal à F , et on note $x \perp F$, s'il est orthogonal à tout vecteur de F , i.e. si pour tout $y \in F$, $\langle x, y \rangle = 0$.

• On appelle **orthogonal** de F , et on note F^\perp , l'ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à F :

$$F^\perp = \{x \in E : x \perp F\} = \{x \in E : \forall y \in F, \langle x, y \rangle = 0\}.$$

Exemple 3.10 Dans \mathbb{R}^3 muni de son produit scalaire canonique, le vecteur $(1, 1, 1)$ est orthogonal au plan d'équation $x + y + z = 0$.

LEMME 3.11 Soit x un vecteur de E .

Si y_1, \dots, y_r sont des vecteurs de E orthogonaux à x , alors toute combinaison linéaire de y_1, \dots, y_r est encore orthogonale à x .

Remarque 3.12 Pour $x \in E$ donné, l'application $\phi_x : y \in E \mapsto \langle x, y \rangle$ est une forme linéaire sur E . Son noyau $\text{Ker } \phi_x$ est le sous-espace formé des vecteurs de E qui sont orthogonaux à x .

PROPOSITION 3.13 (i) L'orthogonal F^\perp d'un sous-espace vectoriel F de E est lui-même un sous-espace vectoriel de E .

(ii) Tous les vecteurs de E sont orthogonaux au vecteur nul : $\{0\}^\perp = E$.

(iii) Seul le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs de E : $E^\perp = \{0\}$.

PROPOSITION 3.14 Soit F un sous-espace vectoriel de E et (e_1, \dots, e_r) une famille génératrice (par exemple une base) de F .

Un vecteur de E est orthogonal à F si, et seulement si, il est orthogonal aux vecteurs e_1, \dots, e_r .

Exemple 3.15 Dans \mathbb{R}^5 muni de son produit scalaire canonique, déterminer l'orthogonal du sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $(1, 0, -1, 0, 1)$ et $(0, 1, 0, -2, 0)$.

PROPOSITION 3.16 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

(i) Si $F \subset G$, alors $G^\perp \subset F^\perp$.

(ii) Les sous-espaces F et F^\perp sont en somme directe : $F \cap F^\perp = \{0\}$.

(iii) On a : $F \subset F^{\perp\perp}$.

Remarque 3.17 Étant donné un sous-espace vectoriel F de E , la somme $F + F^\perp$ est directe d'après la proposition précédente. On verra plus loin que lorsque E est de dimension finie, cette somme est égale à E , ce qui signifie que F^\perp est un supplémentaire de F . Il n'en est rien en dimension infinie (cf. TD).

3.3 Sous-espaces orthogonaux

DÉFINITION 3.18 On dit que deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont **orthogonaux**, et l'on note $F \perp G$, si, pour tout $(x, y) \in F \times G$, $\langle x, y \rangle = 0$.

Exemple 3.19 Dans l'espace vectoriel $\mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ muni de son produit scalaire usuel, les sous-espaces F des fonctions paires et G des fonctions impaires sont orthogonaux.

Remarque 3.20 L'assertion $F \perp G$ signifie que tout vecteur de F est orthogonal à G , ce qui équivaut à l'inclusion $F \subset G^\perp$. Bien sûr par symétrie cette propriété peut aussi s'exprimer sous la forme $G \subset F^\perp$.

PROPOSITION 3.21 Soient F et G deux sous-espaces de E et $(u_1, \dots, u_r), (v_1, \dots, v_s)$ des familles respectivement génératrices (par exemple des bases) de F et G .

Les sous-espaces F et G sont orthogonaux si, et seulement si :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, r \rrbracket \times \llbracket 1, s \rrbracket, \quad \langle u_i, v_j \rangle = 0.$$

Exemple 3.22 Dans l'espace vectoriel $\mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$ muni de son produit scalaire usuel, les sous-espaces F engendré par les fonctions $x \mapsto \cos(kx)$, $0 \leq k \leq n$, et G engendré par les fonctions $x \mapsto \sin(kx)$, $0 \leq k \leq n$, sont orthogonaux.

PROPOSITION-DÉFINITION 3.23 La somme F d'une famille finie (F_1, \dots, F_r) de sous-espaces vectoriels de E deux-à-deux orthogonaux est directe. On l'appelle la **somme directe orthogonale** des sous-espaces F_1, \dots, F_r ,

et on la note

$$F = \bigoplus_{1 \leq i \leq r}^{\perp} F_i.$$

Remarque 3.24 Sous les hypothèses de la proposition précédente :

$$F = \bigoplus_{1 \leq i \leq r}^{\perp} F_i, \quad (3.1)$$

alors en réunissant des bases orthonormales de chacun des sous-espaces F_1, \dots, F_r , on obtient une base orthonormale de F , dite adaptée à la décomposition (3.1).