Chapitre 4 :

VECTEURS ALÉATOIRES DISCRETS

1 Couples de variables aléatoires discrètes **2**
1.1 Généralités 2
1.2 Loi conjointe et lois marginales 2
1.3 Lois conditionnelles 3
1.4 Indépendance de deux variables aléatoires discrètes 4

2 Variable aléatoire fonction de deux variables aléatoires discrètes **4**
2.1 Généralités 4
2.2 Exemple : somme de deux variables aléatoires discrètes 5
2.3 Espérance 5
2.4 Covariance 5
2.5 Corrélation linéaire 6

3 Vecteurs aléatoires discrets **7**
3.1 Généralités 7
3.2 Indépendance mutuelle de plusieurs variables aléatoires discrètes 7
3.3 Variable aléatoire fonction d'un vecteur aléatoire discret 8
3.4 Somme de variables aléatoires discrètes 8

www.rblld.fr

Dans tout le chapitre, on se donne un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sur lequel sont définies toutes les variables aléatoires considérées, supposées discrètes.
On souhaite mener l'étude conjointe de plusieurs variables aléatoires réelles, en nombre fini (notion de vecteur aléatoire) ou infini (notion de famille de variables aléatoires réelles).

1. Couples de variables aléatoires discrètes

1.1 Généralités

Définition 1.1 *On appelle **couple aléatoire discret** toute application de la forme*

$$\mathrm{V} : \begin{array}{rcl} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \omega & \longmapsto & \big(\mathrm{X}(\omega), \mathrm{Y}(\omega)\big) \end{array}$$

où X *et* Y *sont deux variables aléatoires réelles discrètes. Un tel couple est noté* $\mathrm{V} = (\mathrm{X}, \mathrm{Y})$.

Exemple 1.2 On considère une urne contenant quatre boules numérotées de 1 à 4, dans laquelle on effectue successivement deux tirages avec remise. On note X le numéro de la première boule tirée et Y celui de la deuxième boule tirée. Le couple (X, Y) constitue un couple aléatoire. On note S la somme des deux tirages.

Dans toute la suite du paragraphe, X et Y désignent deux variables aléatoires réelles discrètes. Pour x et y réels, on notera $[\mathrm{X} = x, \mathrm{Y} = y]$ l'événement $[\mathrm{X} = x] \cap [\mathrm{Y} = y]$.
On se donne des énumérations $(x_i)_{i\in \mathrm{I}}$ et $(y_j)_{j\in\mathrm{J}}$ de $\mathrm{X}(\Omega)$ et $\mathrm{Y}(\Omega)$ (où I et J sont des parties de $\mathbb{N}$). Cela signifie que l'application $i \longmapsto x_i$ est une bijection de I sur $\mathrm{X}(\Omega)$ et de même pour $(y_j)_{j\in\mathrm{J}}$.

Proposition-Définition 1.3 *(i) La famille* $\big([\mathrm{X} = x, \mathrm{Y} = y]\big)_{(x,y)\in\mathrm{X}(\Omega)\times\mathrm{Y}(\Omega)}$ *est un système complet d'événements appelé **système complet associé** au couple* (X, Y).
*(ii) On appelle **tribu associée** au couple* (X, Y)*, et l'on note* $\mathcal{A}_{(\mathrm{X},\mathrm{Y})}$*, la tribu engendrée par le système complet associé à* (X, Y).

Remarque 1.4 Attention, certaines parts du système complet précédent peuvent être vides.

Exemple 1.5 Déterminer les parts vides dans la famille $\big([\mathrm{X} = x, \mathrm{S} = s]\big)_{(x,s)\in[\![1,4]\!]\times[\![2,8]\!]}$ de l'exemple 1.2.

Proposition 1.6 *La tribu associée à* (X, Y) *est plus fine que chacune des tribus associées à* X *et* Y *: on a les inclusions* $\mathcal{A}_\mathrm{X} \subset \mathcal{A}_{(\mathrm{X},\mathrm{Y})}$ *et* $\mathcal{A}_\mathrm{Y} \subset \mathcal{A}_{(\mathrm{X},\mathrm{Y})}$.

1.2 Loi conjointe et lois marginales

Définition 1.7 *On appelle **loi conjointe** du couple* (X, Y) *la fonction*

$$\mathbb{P}_{(\mathrm{X},\mathrm{Y})} : \begin{array}{rcl} \mathrm{X}(\Omega) \times \mathrm{Y}(\Omega) & \longrightarrow & [0, 1] \\ (x, y) & \longmapsto & \mathbb{P}(\mathrm{X} = x, \mathrm{Y} = y) \end{array}.$$

La donnée de la loi conjointe du couple (X, Y) *est équivalente à celle de la famille double* $(p_{i,j})_{(i,j)\in\mathrm{I}\times\mathrm{J}}$ *définie par :*

$$\forall (i, j) \in \mathrm{I} \times \mathrm{J}, \quad p_{i,j} = \mathbb{P}(\mathrm{X} = x_i, \mathrm{Y} = y_j).$$

Exemple 1.8 On reprend l'exemple 1.2.
Représenter sous la forme d'une matrice la loi conjointe $(p_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,4]\!]\times[\![2,8]\!]}$ du couple (X, S).

Définition 1.9 *(i) On appelle **première loi marginale** du couple* (X, Y) *la loi de la variable aléatoire* X.
La donnée de la première loi marginale est équivalente à celle de la famille $(p_{i,\cdot})_{i\in\mathrm{I}}$ *définie par :*

$$\forall i \in \mathrm{I}, \quad p_{i,\cdot} = \mathbb{P}(\mathrm{X} = x_i).$$

www.rblld.fr

*(ii) On appelle **seconde loi marginale** du couple (X,Y) la loi de la variable aléatoire Y. La donnée de la seconde loi marginale est équivalente à celle de la famille $(p_{\cdot,j})_{j\in J}$ définie par :*

$$\forall j\in J,\quad p_{\cdot,j}=\mathbb{P}(Y=y_j).$$

Proposition 1.10 *Les lois marginales sont déterminées par la loi conjointe :*

(i) $\forall i\in I,\quad p_{i,\cdot}=\sum_{j\in J}p_{i,j}$; *(ii)* $\forall j\in J,\quad p_{\cdot,j}=\sum_{i\in I}p_{i,j}$.

Remarques 1.11 • En d'autres termes, si l'on représente la loi conjointe dans une matrice $(p_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$, la première (resp. seconde) loi marginale s'obtient en sommant les coefficients se trouvant sur chaque ligne (resp. colonne).
C'est souvent ainsi qu'on fait figurer côte à côte la loi conjointe et les lois marginales d'un couple aléatoire.

• Dans la notation des lois marginales, le point représente la variable sur laquelle on somme.

Exemple 1.12 On reprend l'exemple 1.2.
Ajouter une dernière colonne et une dernière ligne au tableau de l'exemple 1.8 que l'on remplira respectivement avec les lois marginales $(p_{i,\cdot})_{i\in[\![1,4]\!]}$ et $(p_{\cdot,j})_{j\in[\![2,8]\!]}$ du couple (X,S).

Remarque 1.13 La réciproque de la proposition 1.10 est fausse : la donnée des lois marginales ne permet pas de déterminer la loi conjointe.
On examinera le contre-exemple suivant : on effectue un tirage dans une urne contenant une boule blanche et une boule noire. On note X (resp. Y) la variable aléatoire égale à 0 (resp. 1) si la boule tirée est blanche, 1 (resp. 0) si elle est noire. Vérifier que les couples (X,X) et (X,Y) ont mêmes lois marginales mais des lois conjointes distinctes.

Exemple 1.14 (où la loi conjointe est plus facile à déterminer que les lois marginales) On reprend l'exemple 1.2. On note $U=\min(X,Y)$ le plus petit des deux tirages et $V=\max(X,Y)$ le plus grand.
Déterminer la loi conjointe de (U,V) puis en déduire les lois marginales.

Proposition 1.15 *Une famille réelle double $(p_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ (avec I et J dénombrables) représente la loi conjointe d'un couple aléatoire discret (X,Y) si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) $\forall (i,j)\in I\times J,\quad p_{i,j}\geqslant 0$; *(ii)* $\sum_{(i,j)\in I\times J}p_{i,j}=1$.

Remarque 1.16 Toutes les sommes considérées dans ce paragraphe étant à termes positifs, elles sont bien définies car indépendantes du choix d'un ordre de sommation.

1.3 Lois conditionnelles

Définition 1.17 *(i) Soit A un événement tel que $\mathbb{P}(A)>0$. On appelle **loi conditionnelle** de X sachant A la loi de X dans l'espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P}_A)$, i.e. l'application*

$$\begin{aligned} X(\Omega) &\longrightarrow [0,1] \\ x &\longmapsto \mathbb{P}_A([X=x])=\frac{\mathbb{P}(A\cap[X=x])}{\mathbb{P}(A)}\end{aligned}.$$

(ii) En particulier, pour $y\in Y(\Omega)$ donné tel que $\mathbb{P}(Y=y)>0$, la loi conditionnelle de X sachant $[Y=y]$ est la loi de X pour la mesure $\mathbb{P}_{[Y=y]}$.

Proposition 1.18 *Pour $j\in J$ donné, la loi conditionnelle de X sachant $Y=y_j$ est donnée par :*

$$\forall i\in I,\quad \mathbb{P}_{[Y=y_j]}(X=x_i)=\frac{p_{i,j}}{p_{\cdot,j}}.$$

www.rblld.fr

1.4 Indépendance de deux variables aléatoires discrètes

Définition 1.19 *On dit que les variables aléatoires* X *et* Y *sont* ***indépendantes*** *si pour tout* $(x,y) \in X(\Omega)\times Y(\Omega)$, *les événements* $[X=x]$ *et* $[Y=y]$ *sont indépendants, c'est-à-dire :*

$$\forall (x,y) \in X(\Omega)\times Y(\Omega), \qquad \mathbb{P}(X=x, Y=y) = \mathbb{P}(X=x)\,\mathbb{P}(Y=y).$$

Proposition 1.20 *Si* X *et* Y *sont indépendantes, la loi conjointe* $(p_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ *du couple* (X,Y) *est déterminée par les lois marginales* $(p_{i,\cdot})_{i\in I}$ *et* $(p_{\cdot,j})_{j\in J}$ *:*

$$\forall (i,j) \in I\times J, \qquad p_{i,j} = p_{i,\cdot}.p_{\cdot,j}.$$

Exemple 1.21 Dans l'exemple 1.2, les variables aléatoires X et Y sont indépendantes mais pas les variables aléatoires X et S.

Proposition 1.22 *Les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) les variables aléatoires X *et* Y *sont indépendantes ;*
(ii) pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, *les élévenements* $[X \leqslant x]$ *et* $[Y \leqslant y]$ *sont indépendants ;*
(iii) pour toutes parties A *et* B *de* $\mathbb{R}$, *les événements* $[X \in A]$ *et* $[Y \in B]$ *sont indépendants ;*
(iv) les tribus $\mathcal{A}_X$ *et* $\mathcal{A}_Y$ *sont indépendantes.*

Corollaire 1.23 *Soient* $g : X(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $h : Y(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ *deux fonctions.*
Si X *et* Y *sont indépendantes, alors les variables aléatoires* $g(X)$ *et* $h(Y)$ *sont indépendantes.*

Corollaire 1.24 *Soit* $A \in \mathcal{A}$ *un événement tel que* $\mathbb{P}(A) > 0$. *On suppose que* X *admet une espérance.*
Si X *et* Y *sont indépendantes et si* $A \in \mathcal{A}_Y$, *alors* $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X\,|\,A)$.

2. Variable aléatoire fonction de deux variables aléatoires discrètes

Dans tout ce paragraphe, X et Y désignent deux variables aléatoires réelles discrètes.
Pour une fonction $g : X(\Omega)\times Y(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée, on considère l'application

$$Z = g(X,Y) : \begin{array}{rcl} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & g\big(X(\omega), Y(\omega)\big) \end{array}.$$

2.1 Généralités

Lemme 2.1 *Pour tout* $z \in \mathbb{R}$,

$$[Z=z] = \bigcup_{\substack{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)\,:\\ g(x,y)=z}} [X=x]\cap[Y=y]$$

où l'union est disjointe.

Proposition 2.2 *L'application* $Z = g(X,Y)$ *est une variable aléatoire discrète.*
La tribu $\mathcal{A}_Z$ *qui lui est associée est moins fine que la tribu associée au couple* (X,Y) *:* $\mathcal{A}_Z \subset \mathcal{A}_{(X,Y)}$.

Proposition 2.3 *La variable aléatoire* Z *est à valeurs dans l'image de* g. *Sa loi est donnée par :*

$$\forall z \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}(Z=z) = \sum_{\substack{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)\,:\\ g(x,y)=z}} \mathbb{P}(X=x, Y=y).$$

En particulier, si X *et* Y *sont indépendantes,*

$$\forall z \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}(Z=z) = \sum_{\substack{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)\,:\\ g(x,y)=z}} \mathbb{P}(X=x)\,\mathbb{P}(Y=y).$$

www.rblld.fr

Exemple 2.4 On reprend l'exemple 1.2 et l'on note V le plus grand des deux tirages. Déterminer la loi de $Z_1 = X + V$ puis de $Z_2 = XV$.

2.2 Exemple : somme de deux variables aléatoires discrètes

PROPOSITION 2.5 *La loi de* $X + Y$ *est donnée par :*

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}(X+Y=s) = \sum_{\substack{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)\,:\\ x+y=s}} \mathbb{P}(X=x, Y=y) = \sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=x, Y=s-x).$$

COROLLAIRE 2.6 *Si* X *et* Y *sont indépendantes,*

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}(X+Y=s) = \sum_{\substack{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)\,:\\ x+y=s}} \mathbb{P}(X=x)\,\mathbb{P}(Y=y) = \sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=x)\,\mathbb{P}(Y=s-x).$$

Cette loi est appelée ***produit de convolution*** *des lois marginales de* X *et* Y.

PROPOSITION 2.7 *Si* X *et* Y *sont deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement des lois binomiales* $\mathcal{B}(n,p)$ *et* $\mathcal{B}(m,p)$*, alors* $X+Y$ *suit une loi binomiale* $\mathcal{B}(n+m,p)$.

PROPOSITION 2.8 *Si* X *et* Y *sont deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement des lois de Poisson* $\mathcal{P}(\lambda)$ *et* $\mathcal{P}(\mu)$*, alors* $X+Y$ *suit une loi de Poisson* $\mathcal{P}(\lambda+\mu)$.

2.3 Espérance

THÉORÈME 2.9 (DE TRANSFERT) *La variable* $Z = g(X,Y)$ *admet une espérance si, et seulement si, la série ci-dessous converge absolument et alors :*

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} g(x,y)\,\mathbb{P}(X=x, Y=y) = \sum_{(i,j)\in I\times J} g(x_i, y_j) p_{i,j}.$$

THÉORÈME 2.10 (LINÉARITÉ DE L'ESPÉRANCE) *Si* X *et* Y *admettent chacune une espérance, alors pour tous* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$*, la variable aléatoire* $\lambda X + \mu Y$ *admet une espérance égale à :*

$$\mathbb{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda\,\mathbb{E}(X) + \mu\,\mathbb{E}(Y).$$

PROPOSITION 2.11 (POSITIVITÉ DE L'ESPÉRANCE) *On suppose que* $X \geqslant 0$ *presque sûrement (i.e.* $\mathbb{P}(X \geqslant 0) = 1$*). Si* X *admet une espérance, alors* $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$ *avec égalité si, et seulement si,* $X = 0$ *presque sûrement (i.e.* $P(X=0)=1$*).*

Remarque 2.12 Bien sûr, sans l'hypothèse $X \geqslant 0$ p.s., $\mathbb{E}(X) = 0$ n'entraîne pas $X = 0$ p.s.. Trouver un contre-exemple.

THÉORÈME 2.13 (CROISSANCE DE L'ESPÉRANCE) *On suppose que* $X \leqslant Y$ *presque sûrement.*
Si X *et* Y *admettent chacune une espérance, alors* $\mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y)$ *avec égalité si, et seulement si,* $X = Y$ *presque sûrement.*

THÉORÈME 2.14 *Si* X *et* Y *sont indépendantes et admettent chacune une espérance, alors* XY *admet une espérance et :*

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y).$$

2.4 Covariance

DÉFINITION 2.15 *Sous réserve d'existence, on appelle* ***covariance*** *du couple* (X,Y) *le réel noté* $\mathrm{cov}(X,Y)$ *et défini par :*

$$\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}\big[\big(X - \mathbb{E}(X)\big)\big(Y - \mathbb{E}(Y)\big)\big].$$

www.rblld.fr

En particulier, si X *admet une variance, on a :*

$$\mathrm{cov}(X, X) = \mathbb{V}(X).$$

Remarque 2.16 Intuitivement, $\mathrm{cov}(X, Y)$ est une mesure de la variation simultanée de X et Y. Le signe de $\mathrm{cov}(X, Y)$ indique ainsi si X et Y ont tendance à se situer du même côté de leur espérance ou de part et d'autre.

Exemple 2.17 On effectue un tirage dans une urne contenant une boule blanche et une boule noire. On note X (resp. Y) la variable aléatoire égale à 0 (resp. 1) si la boule tirée est blanche, 1 (resp. 0) si elle est noire. Vérifier que $\mathrm{cov}(X, X) > 0$ alors que $\mathrm{cov}(X, Y) < 0$.

LEMME 2.18 *Si* X *et* Y *admettent chacune un moment d'ordre 2, alors* XY *admet une espérance.*

THÉORÈME 2.19 *Si* X *et* Y *admettent chacune un moment d'ordre 2, alors le couple* (X, Y) *admet une covariance avec (formule de Huygens) :*

$$\mathrm{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y).$$

De plus,

$$\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\,\mathrm{cov}(X, Y).$$

COROLLAIRE 2.20 *Si* X *et* Y *sont deux variables aléatoires indépendantes admettant chacune un moment d'ordre 2, alors* $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$ *(on dit que les variables aléatoires* X *et* Y *sont* ***non corrélées****) et*

$$\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y).$$

La réciproque est fausse : deux variables aléatoires non corrélées ne sont pas nécessairement indépendantes.

PROPOSITION 2.21 *L'application* cov *est une forme bilinéaire symétrique sur l'espace des variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2 (cf. chapitre 9) :*

(i) symétrique : $\mathrm{cov}(Y, X) = \mathrm{cov}(X, Y)$ *;*

(ii) bilinéaire, i.e. linéaire par rapport à chaque entrée : si X' *et* Y' *sont deux autres variables aléatoires admettant chacune un moment d'ordre 2, on a :*

- *linéarité à gauche :*

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{cov}(\lambda X + \mu X', Y) = \lambda\,\mathrm{cov}(X, Y) + \mu\,\mathrm{cov}(X', Y)\,;$$

- *linéarité à droite :*

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{cov}(X, \lambda Y + \mu Y') = \lambda\,\mathrm{cov}(X, Y) + \mu\,\mathrm{cov}(X, Y').$$

2.5 Corrélation linéaire

PROPOSITION 2.22 *Si* X *et* Y *admettent chacune un moment d'ordre 2, alors*

$$|\mathrm{cov}(X, Y)| \leqslant \sigma(X)\sigma(Y).$$

DÉFINITION 2.23 *Si* X *et* Y *admettent chacune une variance non nulle, on appelle* ***coefficient de corrélation linéaire*** *de* X *et* Y *le réel noté* $\varrho_{X,Y}$ *et défini par :*

$$\varrho_{X,Y} = \frac{\mathrm{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

PROPOSITION 2.24 *Si* X *et* Y *admettent chacune une variance non nulle, alors* $|\varrho_{X,Y}| \leqslant 1$*, avec égalité si, et seulement si, il existe a et b réels tels que* $Y = aX + b$ *presque sûrement. De plus, a est du signe de* $\varrho_{X,Y}$.

www.rblld.fr

3. Vecteurs aléatoires discrets

Dans tout ce paragraphe, on considère un entier naturel $n \geqslant 2$.

3.1 Généralités

DÉFINITION 3.1 *On appelle* ***vecteur aléatoire discret*** *toute application de la forme*

$$V : \begin{array}{rcl} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ \omega & \longmapsto & \big(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)\big) \end{array}$$

où $X_1, \dots, X_n$ *sont des variables aléatoires réelles discrètes. Un tel vecteur aléatoire est noté* $V = (X_1, \dots, X_n)$.

Dans la suite de ce paragraphe, on se donne un vecteur aléatoire discret $(X_1, \dots, X_n)$.

DÉFINITION 3.2 *On appelle* ***système complet associé*** *à* $(X_1, \dots, X_n)$ *la famille d'événements*

$$\big([X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n]\big)_{(x_1,\dots,x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)}.$$

On appelle ***tribu*** *associée à* $(X_1, \dots, X_n)$, *et l'on note* $\mathcal{A}_{(X_1,\dots,X_n)}$ *la tribu engendrée par le système complet associé à* $(X_1, \dots, X_n)$.

DÉFINITION 3.3 *(i) On appelle* ***loi conjointe*** *du vecteur aléatoire* $(X_1, \dots, X_n)$ *la fonction*

$$\mathbb{P}_{(X_1,\dots,X_n)} : \begin{array}{rcl} X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega) & \longrightarrow & [0, 1] \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & \mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) \end{array}$$

où $[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n] = [X_1 = x_1] \cap \cdots \cap [X_n = x_n]$.

(ii) On appelle ***lois marginales*** *du vecteur aléatoire* $(X_1, \dots, X_n)$ *les lois des variables aléatoires* $X_1, \dots, X_n$.

Remarque 3.4 La loi conjointe du vecteur aléatoire $(X_1, \dots, X_n)$ détermine ses lois marginales, ainsi que les lois conjointes des sous-vecteurs de $(X_1, \dots, X_n)$.

3.2 Indépendance mutuelle de plusieurs variables aléatoires discrètes

DÉFINITION 3.5 *On dit que les variables* $X_1, \dots, X_n$ *sont* ***mutuellement indépendantes*** *si, pour tout* $(x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$,

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_1 = x_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(X_n = x_n)$$

Remarques 3.6
- Si $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors toute sous-famille de $(X_1, \dots, X_n)$ est formée de variables aléatoires mutuellement indépendantes. Ainsi les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes si, et seulement si, pour toute famille $(x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$, les événements $[X_1 = x_1], \dots, [X_n = x_n]$ sont mutuellement indépendants.
- En particulier, si les variables $X_1, \dots, X_n$, sont mutuellement indépendantes, alors elles sont deux-à-deux indépendantes (i.e. pour tous $i \neq j \in [\![1, n]\!]$, X_i et X_j sont indépendantes), mais la réciproque est fausse.

PROPOSITION 3.7 (LEMME DES COALITIONS) *Soit un entier* p *tel que* $1 \leqslant p \leqslant n-1$.
Si les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ *sont mutuellement indépendantes, alors les tribus* $\mathcal{A}_{(X_1,\dots,X_p)}$ *et* $\mathcal{A}_{(X_{p+1},\dots,X_n)}$ *sont indépendantes. Dans ces conditions, étant données deux fonctions* $f : X_1(\Omega) \times \cdots \times X_p(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $g : X_{p+1}(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, *les variables aléatoires* $f(X_1, \dots, X_p)$ *et* $g(X_{p+1}, \dots, X_n)$ *sont indépendantes.*

DÉFINITION 3.8 *Soit* $(X_k)_{k \in K}$ *une famille de variables aléatoires.*
On dit que les variables aléatoires X_k, $k \in K$, *sont mutuellement indépendantes si, et seulement si, pour tout entier naturel* $n \geqslant 2$ *et tous* $k_1, \dots, k_n \in K$ *deux-à-deux distincts, les variables aléatoires* $X_{k_1}, \dots, X_{k_n}$ *sont mutuellement indépendantes.*

www.rblld.fr

Remarques 3.9 • Dans le cas d'une suite $(\mathrm{X}_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$, les variables aléatoires X_i, $i \in \mathbb{N}$, sont mutuellement indépendantes si, et seulement si, pour tout $n \geqslant 2$, les variables $\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n$ sont mutuellement indépendantes.

• Les variables aléatoires X_k, $k \in \mathrm{K}$, sont mutuellement indépendantes si, et seulement si, pour toute famille $(x_k)_{k\in\mathrm{K}} \in \prod_{k\in\mathrm{K}} \mathrm{X}_k(\Omega)$, les événements $[\mathrm{X}_k = x_k]$, $k \in \mathrm{K}$, sont mutuellement indépendants.

3.3 Variable aléatoire fonction d'un vecteur aléatoire discret

Proposition-Définition 3.10 *Soit $g : \mathrm{X}_1(\Omega) \times \cdots \times \mathrm{X}_n(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.*

(i) L'application

$$\mathrm{Z} : \begin{array}{l} \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega \longmapsto g\big(\mathrm{X}_1(\omega), \dots, \mathrm{X}_n(\omega)\big) \end{array}$$

est une variable aléatoire notée $\mathrm{Z} = g(\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n)$.

(ii) Elle est à valeurs dans l'image de g et sa loi est donnée par :

$$\forall z \in \mathbb{R}, \qquad \mathbb{P}(\mathrm{Z} = z) = \sum_{\substack{(x_1,\dots,x_n)\in \mathrm{X}_1(\Omega)\times\cdots\times \mathrm{X}_n(\Omega) : \\ g(x_1,\dots,x_n)=z}} \mathbb{P}(\mathrm{X}_1 = x_1, \dots, \mathrm{X}_n = x_n).$$

(iii) La tribu associée à Z est moins fine que celle du vecteur aléatoire $(\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n)$: on a $\mathcal{A}_\mathrm{Z} \subset \mathcal{A}_{(\mathrm{X}_1,\dots,\mathrm{X}_n)}$.

Théorème 3.11 (de transfert) *La variable $\mathrm{Z} = g(\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n)$ admet une espérance si, et seulement si, la série ci-dessous converge absolument et alors :*

$$\mathbb{E}(\mathrm{Z}) = \sum_{(x_1,\dots,x_n)\in \mathrm{X}_1(\Omega)\times\cdots\times \mathrm{X}_n(\Omega)} g(x_1, \dots, x_n)\, \mathbb{P}(\mathrm{X}_1 = x_1, \dots, \mathrm{X}_n = x_n).$$

Proposition 3.12 *Si $\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n$ sont mutuellement indépendantes et admettent toutes une espérance, alors le produit $\mathrm{X}_1 \cdots \mathrm{X}_n$ admet lui aussi une espérance donnée par :*

$$\mathbb{E}(\mathrm{X}_1 \cdots \mathrm{X}_n) = \mathbb{E}(\mathrm{X}_1) \cdots \mathbb{E}(\mathrm{X}_n).$$

3.4 Somme de variables aléatoires discrètes

Proposition 3.13 *Si les variables aléatoires $\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n$ admettent chacune un moment d'ordre 2, alors la somme $\mathrm{X}_1 + \cdots + \mathrm{X}_n$ admet une variance donnée par :*

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(\mathrm{X}_1 + \cdots + \mathrm{X}_n) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(\mathrm{X}_i) + \sum_{1\leqslant i\neq j\leqslant n} \operatorname{cov}(\mathrm{X}_i, \mathrm{X}_j) \\ &= \mathbb{V}(\mathrm{X}_1) + \cdots + \mathbb{V}(\mathrm{X}_n) + 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \operatorname{cov}(\mathrm{X}_i, \mathrm{X}_j). \end{aligned}$$

Corollaire 3.14 *Si $\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n$ admettent chacune un moment d'ordre 2 et sont deux-à-deux indépendantes, alors la somme $\mathrm{X}_1 + \cdots + \mathrm{X}_n$ admet une variance donnée par :*

$$\mathbb{V}(\mathrm{X}_1 + \cdots + \mathrm{X}_n) = \mathbb{V}(\mathrm{X}_1) + \cdots + \mathbb{V}(\mathrm{X}_n).$$

Théorème 3.15 *Soient $\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n$ des variables aléatoires suivant respectivement des lois binomiales de paramètres $(m_1, p), \dots, (m_n, p)$.*
Si $\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n$ sont mutuellement indépendantes, alors la variable aléatoire $\mathrm{S}_n = \mathrm{X}_1 + \cdots + \mathrm{X}_n$ suit la loi binomiale de paramètre $(m_1 + \cdots + m_n, p)$.

Corollaire 3.16 *Soient $\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n$ des variables aléatoires suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre p.*
Si $\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n$ sont mutuellement indépendantes, alors la variable aléatoire $\mathrm{S}_n = \mathrm{X}_1 + \cdots + \mathrm{X}_n$ suit la loi binomiale de paramètre (n, p).

www.rblld.fr

THÉORÈME 3.17 *Soient* $X_1, \ldots, X_n$ *des variables aléatoires suivant respectivement des lois de Poisson de paramètres* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.
Si $X_1, \ldots, X_n$ *sont mutuellement indépendantes, alors la variable aléatoire* $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ *suit la loi de Poisson de paramètre* $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n$.

www.rblld.fr