Chapitre 3 :

RÉVISIONS DE PROBABILITÉS GÉNÉRALES ET DISCRÈTES

Il n'est pas question dans ce chapitre de révisions de reprendre entièrement le cours de probabilités de première année, il s'agit plutôt d'un rappel (très) synthétique. Les résultats les plus importants sont rappelés et mis en prespective par un ordre de présentation particulier afin de forger des automatismes de calcul.

Dans tout le chapitre, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé.

1. Principes généraux du calcul des probabilités

1.1 Probabilité d'un événement décrit par une expérience concrète

Il s'agit ici d'exposer le principe général du calcul d'une probabilité et de sa rédaction. Les situations étant très variées dans la pratique, on pourra être amené à s'écarter légèrement de la voie tracée ci-dessous.

La rédaction d'un calcul de probabilités comporte généralement quatre étapes.

1. Si cela n'a pas été fait dans l'énoncé, introduire des événements primaires issus de l'expérience décrite. On n'oubliera pas de numéroter ces événements s'ils sont liés à la répétition d'une expérience.
2. Décrire à l'aide d'une phrase l'événement A dont on recherche la probabilité : « l'événement A est réalisé si, et seulement si, … ». Il s'agit d'obtenir une condition nécessaire et suffisante de réalisation de l'événement A faisant intervenir les événements introduits dans la première étape.
3. La troisième étape consiste en une traduction ensembliste du résultat de la seconde : il s'agit d'exprimer A, à l'aide d'unions, d'intersections ou de complémentaires, en fonction des évéments primaires de la première étape.
4. On peut enfin calculer la probabilité $\mathbb{P}(A)$ en s'appuyant sur la décomposition ensembliste précédente de A à partir des règles de calcul des probabilités qui sont rappelées ci-dessous.

Pour s'orienter rapidement vers une technique de calcul pertinente, il est essentiel de savoir se remémorer la liste de méthodes suivantes.

- *Probabilité d'un complémentaire*
  Par définition d'une probabilité, on a :
  $$\forall A \in \mathcal{A}, \quad \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A).$$
- *Probabilité d'une intersection*
  - ➢ Dans le cas d'une intersection dénombrable décroissante, on peut utiliser le

    Théorème 1.1 (Théorème de la limite monotone) *Soit* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'événements.*

    (i) Si la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante pour l'inclusion : pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} \subset A_n$, *alors*
    $$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n).$$
    (ii) Dans le cas général,
    $$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\Big).$$
  - ➢ Pour une famille finie $(A_1, \dots, A_n)$ d'événement mutuellement indépendants, on a :
    $$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_2)\cdots\mathbb{P}(A_n).$$
  - ➢ Pour une famille finie quelconque, on peut utiliser la :

    Théorème 1.2 (Formule des probabilités composées) *Soit* $(A_1, \dots, A_n)$ *une famille d'événements telle que* $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$.
    On a :
    $$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\,\mathbb{P}_{A_1\cap A_2}(A_3)\cdots\mathbb{P}_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n).$$

    Cette proposition est particulièrement utile en présence d'un enchaînement temporel d'événements (A_1 advenant en premier, …, A_n en dernier), chaque résultat influant sur les suivants.

- *Probabilité d'une union*
  - ➢ Pour une famille finie ou dénombrable $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ d'événements deux-à-deux incompatibles, on a par définition d'une probabilité :
$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i\in\mathrm{I}}\mathrm{A}_i\Big)=\sum_{i\in\mathrm{I}}\mathbb{P}(\mathrm{A}_i).$$
  - ➢ Dans le cas d'une union dénombrable croissante, on peut utiliser le

    Théorème 1.3 (Théorème de la limite monotone) *Soit $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements.*

    (i) Si la suite $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion : pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathrm{A}_n\subset\mathrm{A}_{n+1}$, alors
$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{A}_n\Big)=\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(\mathrm{A}_n).$$
    (ii) Dans le cas général,
$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{A}_n\Big)=\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\Big(\bigcup_{k=0}^{n}\mathrm{A}_k\Big).$$
  - ➢ Pour une famille finie $(\mathrm{A}_1,\dots,\mathrm{A}_n)$ d'événements mutuellement indépendants, on se ramène à l'événement complémentaire (on rappelle que $\mathrm{B}_1,\dots,\mathrm{B}_n$ sont alors mutuellement indépendants avec $\mathrm{B}_i=\mathrm{A}_i$ ou $\overline{\mathrm{A}_i}$) :
$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n}\mathrm{A}_i\Big)=1-\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{n}\overline{\mathrm{A}_i}\Big)=1-\prod_{i=1}^{n}\big(1-\mathbb{P}(\mathrm{A}_i)\big).$$
  - ➢ Pour une famille finie quelconque, on peut utiliser lorsqu'on dispose d'informations sur les intersections la formule du crible (explicitement au programme pour $n=2$ et $n=3$ seulement) :

    Théorème 1.4 (Formule du crible de Poincaré) *Étant donnée une famille finie $(\mathrm{A}_1,\dots,\mathrm{A}_n)$ d'événements, on a :*
$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n}\mathrm{A}_i\Big)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\mathbb{P}(\mathrm{A}_{i_1}\cap\mathrm{A}_{i_2}\cap\cdots\cap\mathrm{A}_{i_k}).$$
    En particulier pour $n=2$:
$$\mathbb{P}(\mathrm{A}_1\cup\mathrm{A}_2)=\mathbb{P}(\mathrm{A}_1)+\mathbb{P}(\mathrm{A}_2)-\mathbb{P}(\mathrm{A}_1\cap\mathrm{A}_2)$$
    et $n=3$:
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathrm{A}_1\cup\mathrm{A}_2\cup\mathrm{A}_3)=\mathbb{P}(\mathrm{A}_1)&+\mathbb{P}(\mathrm{A}_2)+\mathbb{P}(\mathrm{A}_3)\\&-\mathbb{P}(\mathrm{A}_2\cap\mathrm{A}_3)-\mathbb{P}(\mathrm{A}_1\cap\mathrm{A}_3)-\mathbb{P}(\mathrm{A}_1\cap\mathrm{A}_2)\\&+\mathbb{P}(\mathrm{A}_1\cap\mathrm{A}_2\cap\mathrm{A}_3).\end{aligned}$$

1.2 Cas d'une expérience dont l'issue dépend du résultat d'une expérience antérieure

Dans certains calculs de probabilités, par exemple lorsque le mode opératoire d'une expérience (e.g. la composition d'une urne) dépend du résultat d'une expérience précédente, il peut être intéressant de discuter suivant le résultat de l'expérience antérieure. Plus précisément, la formule suivante permet de se ramener au calcul des probabilités conditionnellement à chacun des résultats possibles de l'expérience antérieure.

Théorème 1.5 (Formule des probabilités totales) *Soit $(\mathrm{B}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ un système complet, fini ou dénombrable, tel que pour tout $i\in\mathrm{I}$, $\mathbb{P}(\mathrm{B}_i)\neq0$.*
La série ci-dessous converge et l'on a :
$$\forall\mathrm{A}\in\mathcal{A},\quad\mathbb{P}(\mathrm{A})=\sum_{i\in\mathrm{I}}\mathbb{P}(\mathrm{B}_i)\,\mathbb{P}_{\mathrm{B}_i}(\mathrm{A}).$$

Remarque 1.6 Pour un système complet $(\mathrm{B}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ fini ou dénombrable, on a plus généralement
$$\forall\mathrm{A}\in\mathcal{A},\quad\mathbb{P}(\mathrm{A})=\sum_{i\in\mathrm{I}^*}\mathbb{P}(\mathrm{B}_i)\,\mathbb{P}_{\mathrm{B}_i}(\mathrm{A})$$
où I^* désigne l'ensemble des $i\in\mathrm{I}$ pour lesquels $\mathbb{P}(\mathrm{B}_i)>0$.

1.3 Calcul de probabilités conditionnelles

Étant donné un événement B tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$, la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_B$ est une mesure de probabilité. Tous les résultats rappelés ci-dessus s'appliquent donc pour le calcul de probabilités conditionnelles. Quelques remarques et avertissements s'imposent néanmoins :

- Attention, la notion d'événement conditionnel n'a aucun sens : ce n'est pas l'événement qui est conditionnel, mais sa réalisation ! Dans le modèle de rédaction présenté ci-dessus,
  - ➢ la deuxième étape consistera à donner une condition nécessaire et suffisante de réalisation, conditionnellement à un autre événement : « sachant que B est réalisé, A est réalisé si, et seulement si, … » ;
  - ➢ la troisième étape n'a pas lieu d'être : la traduction ensembliste n'ayant pas de sens en tant que telle, elle ne pourra être réalisée qu'au niveau des probabilités, dans la quatrième étape.
- Certaines formules (des probabilités composées, des probabilités totales) appliquées à la mesure de probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_B$ conduisent à conditionner par de nouveaux événements, ce qui revient à faire l'intersection des conditions : pour un événement C tel que $\mathbb{P}_B(C) > 0$, on a $\mathbb{P}_B(\cdot|C) = \mathbb{P}_{B\cap C}$.
- Des événements indépendants A_1 et A_2 ne sont pas nécessairement indépendants conditionnellement à un autre événement B : autrement dit, A_1 et A_2 peuvent être indépendants pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$ mais pas pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}_B$.

2. Rappels et compléments sur les variables aléatoires réelles discrètes

2.1 Définition

Définition 2.1 *Une **variable aléatoire réelle discrète** est une application* $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *dont l'image* $X(\Omega)$ *est dénombrable et telle que* $X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{A}$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

Remarque 2.2 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $[X = x]$ l'événement $X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}$.

Proposition-Définition 2.3 *Soit* X *une variable aléatoire réelle discrète.*
Les événements $[X = x]$, $x \in X(\Omega)$, *forment un système complet. La tribu engendrée par ce système est notée* $\mathcal{A}_X$ *et appelée **tribu associée** à la variable aléatoire* X. *Elle est incluse dans* $\mathcal{A}$.

Remarque 2.4 La tribu $\mathcal{A}_X$ est formée des événements qui « peuvent être définis à partir de X ». Plus précisément, l'application $A \longmapsto [X \in A]$ établit une correspondance bijective entre les parties de $X(\Omega)$ et les éléments de $\mathcal{A}_X$.

Proposition 2.5 *Soient* X, Y *deux variables aléaoires réelles discrètes,* $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $g : X(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction. Les applications* $\lambda X + Y$, XY *et* $g(X) = g \circ X$ *sont encore des variables aléatoires discrètes.*

Définition 2.6 *On appelle **loi** d'une variable aléatoire discrète* X *la fonction*

$$\mathbb{P}_X : \begin{array}{rcl} X(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & \mathbb{P}(X = x) \end{array}.$$

2.2 Espérance

Dans toute cette section, X désigne une variable aléatoire réelle discrète.

Définition 2.7 *L'**espérance** de* X *est, sous réserve de* convergence absolue, *le réel noté* $\mathbb{E}(X)$ *et défini par :*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} x\,\mathbb{P}(X = x).$$

Remarques 2.8
- La condition de convergence absolue porte en fait sur la série obtenue en choisissant un ordre de sommation. Ainsi la valeur de la somme ne dépend pas du choix de l'ordre de sommation.

- Toute variable aléatoire finie admet une espérance.

Remarque 2.9 L'espérance d'une variable aléatoire n'existe pas toujours. Il en va ainsi dans les deux cas suivants. On pose $p_n = \frac{6}{(n\pi)^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et on admet que $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$:

- si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{P}(X = n) = p_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum_{n\geqslant 1} np_n$ diverge ;
- si $X(\Omega) = \{(-1)^n n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\mathbb{P}\big(X = (-1)^n n\big) = p_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n np_n$ est seulement semi-convergente.

Proposition 2.10 (Positivité de l'espérance) *On suppose que* $X \geqslant 0$ *presque sûrement (i.e.* $\mathbb{P}(X \geqslant 0) = 1$*). Si* X *admet une espérance, alors* $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$ *avec égalité si, et seulement si,* $X = 0$ *presque sûrement (i.e.* $P(X = 0) = 1$*).*

Remarque 2.11 Bien sûr, sans l'hypothèse $X \geqslant 0$ p.s., $\mathbb{E}(X) = 0$ n'entraîne pas $X = 0$ p.s.. Trouver un contre-exemple.

Théorème 2.12 (de transfert) *Soit* $g : X(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction.*
La variable aléatoire $g(X)$ *admet une espérance si, et seulement si, la série ci-dessous converge absolument, et dans ce cas :*

$$\mathbb{E}\big(g(X)\big) = \sum_{x\in X(\Omega)} g(x)\,\mathbb{P}(X = x).$$

Les théorèmes 2.13 et 2.15 ci-dessous seront établis dans le prochain chapitre de probabilités mais peuvent d'ores et déjà êre utiles.

Théorème 2.13 (Linéarité de l'espérance, admise) *Soient* X *et* Y *deux variables aléatoires réelles discrètes. Si* X *et* Y *admettent chacune une espérance alors, pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$*, la variable aléatoire* $\lambda X + Y$ *admet aussi une espérance égale à* $\mathbb{E}(\lambda X + Y) = \lambda\,\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$.

Corollaire 2.14 (Croissance de l'espérance) *On suppose que* $X \leqslant Y$ *presque sûrement.*
Si X *et* Y *admettent chacune une espérance, alors* $\mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y)$ *avec égalité si, et seulement si,* $X = Y$ *presque sûrement.*

Théorème 2.15 (Existence d'une espérance par domination, admis) *Soient* X *et* Y *deux variables aléatoires réelles discrètes telles que* $|X| \leqslant Y$ *presque sûrement.*
Si Y *admet une espérance, alors* X *admet une espérance et l'on a* $|\mathbb{E}(X)| \leqslant \mathbb{E}(Y)$.

Remarque 2.16 L'existence de $\mathbb{E}(X)$ constitue le point fort du théorème ci-dessus, l'inégalité $|\mathbb{E}(X)| \leqslant \mathbb{E}(Y)$ étant ensuite une conséquence directe de la croissance de l'espérance.

Exemple 2.17 On effectue des lancers successifs d'une pièce de monnaie et on note X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier « double pile ». Justifier que X admet une espérance.

2.3 Espérance conditionnelle

On se donne dans toute la section une variable aléatoire réelle discrète X.

Définition 2.18 *Soit* A *un événement tel que* $\mathbb{P}(A) > 0$.
On appelle ***espérance conditionnelle*** *de* X *sachant* A*, si elle existe, et on note* $\mathbb{E}(X\,|\,A)$*, l'espérance de la variable aléatoire* X *pour la mesure de probabilité* $\mathbb{P}_A$ *i.e., sous réserve de convergence absolue :*

$$\mathbb{E}(X\,|\,A) = \sum_{x\in X(\Omega)} x\,\mathbb{P}_A(X = x) = \sum_{x\in X(\Omega)} x\,\mathbb{P}(X = x|A).$$

Remarque 2.19 L'espérance conditionnelle étant une espérance (pour une mesure de probabilité particulière), on peut lui appliquer tous les résultats connus pour l'espérance (linéarité, croissance, transfert, ...).

Proposition 2.20 *Soit* A *un événement tel que* $\mathbb{P}(A) > 0$.
Si X *admet une espérance, alors* $\mathbb{E}(|X|)$ *et* $\mathbb{E}(X \mid A)$ *existent et l'on a :*

$$|\mathbb{E}(X \mid A)| \leqslant \frac{1}{\mathbb{P}(A)}\, \mathbb{E}(|X|).$$

Théorème 2.21 (Formule de l'espérance totale) *Soit* $(A_i)_{i\in I}$ *un système dénombrable complet) d'événements. On note* I^* *l'ensemble des* $i \in I$ *pour lesquels* $\mathbb{P}(A_i) > 0$.
La variable X *admet une espérance si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont satisfaites :*
(i) pour tout $i \in I^*$, *la variable aléatoire* X *admet une espérance conditionnelle sachant* A_i *;*
(ii) la série $\sum_{i\in I^*} \mathbb{E}\big(|X| \,\big|\, A_i\big)\, \mathbb{P}(A_i)$ *est convergente.*
Dans ce cas, on a :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i\in I^*} \mathbb{E}(X \mid A_i)\, \mathbb{P}(A_i).$$

Remarque 2.22 Les conditions (i) et (ii) du précédent théorème traduisent la convergence absolue de la série double

$$\sum_{(i,x)\in I^*\times X(\Omega)} x\, \mathbb{P}_{A_i}(X = x)\, \mathbb{P}(A_i).$$

Exemple 2.23 On effectue des lancers successifs d'une pièce de monnaie et on note X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier « double pile ». En utilisant un système fondamental défini à partir des résultats des deux premiers lancers, calculer l'espérance de X.

2.4 Moments et variance

On se donne dans toute la section une variable aléatoire réelle discrète X.

Définition 2.24 *Soit* $r \in \mathbb{N}^*$.
On appelle, sous réserve d'existence, ***moment*** *d'ordre* r *de* X *le réel* $\mathbb{M}_r(X) = \mathbb{E}(X^r)$.

Définition 2.25 *On suppose que* X *admet une espérance* $\mathbb{E}(X)$. *On appelle* ***variance*** *de* X, *sous réserve de convergence absolue de la série, et on note* $\mathbb{V}(X)$, *le réel défini par :*

$$\mathbb{V}(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} \big(x - \mathbb{E}(X)\big)^2\, \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{E}\big[\big(X - \mathbb{E}(X)\big)^2\big].$$

Remarques 2.26 • L'existence de $\mathbb{E}(X)$ est une condition nécessaire mais non suffisante pour que X admette une variance.
- Le théorème de transfert assure l'égalité des deux expressions figurant dans la définition de $\mathbb{V}(X)$.
- La série définissant $\mathbb{V}(X)$ étant positive, sa convergence absolue équivaut à sa convergence.

Théorème 2.27 (Kœnig-Huygens) *La variable* X *admet une variance si, et seulement si, elle admet un moment d'ordre 2. Dans ces conditions,*

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{M}_2(X) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

Proposition 2.28 *Si* X *admet une variance, alors* $\mathbb{V}(X) \geqslant 0$ *avec égalité si, et seulement si,* X *est presque sûrement constante (il existe* $m \in \mathbb{R}$ *tel que* $\mathbb{P}(X = m) = 1$*).*

Proposition 2.29 *Si* X *admet une variance alors, pour tous* $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\, \mathbb{V}(X)$.

Définition 2.30 *(i) On dit que la variable aléatoire* X *est* ***centrée*** *si elle admet pour espérance* $\mathbb{E}(X) = 0$.
(ii) On dit que la variable aléatoire X *est* ***centrée réduite*** *si elle admet pour espérance* $\mathbb{E}(X) = 0$ *et pour variance* $\mathbb{V}(X) = 1$.

DÉFINITION 2.31 *Si* X *admet une variance, on appelle* ***écart-type*** *de* X*, et l'on note* $\sigma(X)$*, le réel* $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.

COROLLAIRE 2.32 *Si* X *admet une variance, alors* $X^* = \big(X - \mathbb{E}(X)\big)/\sigma(X)$ *est centrée réduite. On l'appelle la* variable aléatoire centrée réduite associée à X.

3. Rappel des lois discrètes classiques

On rappelle ci-dessous la liste des lois discrètes classiques en précisant rapidement l'expérience type associée. L'expression des lois, ainsi que leurs espérances et variances sont rassemblées dans le tableau page suivante (où l'on a noté $q = 1 - p$).

- Lois issues d'un tirage unique
  - *Loi de Bernoulli* $\mathcal{B}(p)$: succès (valeur 1) ou échec (valeur 0) lors d'un tirage déséquilibré
  - *Loi uniforme* $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$: valeur obtenue lors d'un tirage dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n sous l'hypothèse d'équiprobabilité
- Lois issues d'une répétition de tirages avec remise
  - *Loi binomiale* $\mathcal{B}(n, p)$: nombre de succès lors d'une répétition de n expériences de Bernoulli indépendantes de même paramètre p
  - *Loi géométrique* $\mathcal{G}(p)$: temps d'attente du premier succès lors d'une répétition d'expériences de Bernoulli indépendantes de même paramètre p
  - *Loi de Pascal* $\mathcal{P}(r, p)$ (hors-programme) : temps d'attente du r-ième succès lors d'une répétition d'expériences de Bernoulli indépendantes de même paramètre p
  - *Loi binomiale négative* $\mathcal{J}(r, p)$ (hors-programme) : nombre d'échec précédant le r-ième succès lors d'une répétition d'expériences de Bernoulli indépendantes de même paramètre p
- Lois issues d'une répétition de tirages sans remise (hors-programme)
  - *Loi hypergéométrique* $\mathcal{H}(N, n, p)$: nombre de succès (boules blanches tirées) lors d'une succession de n tirages sans remise dans une urne contenant initialement N boules dont exactement Np boules blanches
  - Temps d'attente du premier ou du r-ième succès, dans le même contexte
- La *loi de Poisson* décrit le nombre de réalisations d'un événement rare.

Lois discrètes classiques

Nom	Paramètre	Notation	Valeurs	Loi	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{V}(X)$
Uniforme	$n \in \mathbb{N}^*$	$\mathcal{U}(n)$	$[\![1, n]\!]$	$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
Bernoulli	$p \in]0, 1[$	$\mathcal{B}(p)$	$\{0, 1\}$	$\mathbb{P}(X = 1) = p$	p	pq
Binomiale	(n, p)	$\mathcal{B}(n, p)$	$[\![0, n]\!]$	$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	np	npq
Géométrique	p	$\mathcal{G}(p)$	$\mathbb{N}^*$	$\mathbb{P}(X = k) = pq^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$
Pascal	(r, p)	$\mathcal{P}(r, p)$	$[\![r, +\infty[\![$	$\mathbb{P}(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r}$	$\frac{r}{p}$	$\frac{rq}{p^2}$
Binomiale négative	(r, p)	$\mathcal{J}(r, p)$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{P}(X = k) = \binom{k+r-1}{k} p^r q^k$	$\frac{rq}{p}$	$\frac{rq}{p}$
Hypergéométrique	(N, n, p)	$\mathcal{H}(N, n, p)$	$\subset [\![0, n]\!]$	$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{Np}{k}\binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	np	$npq\frac{N-n}{N-1}$
Attente du premier succès (tirage sans remise)	(N, p)		$[\![1, Nq+1]\!]$	$\mathbb{P}(X = k) = \frac{Np}{k}\frac{\binom{Nq}{k-1}}{\binom{N}{k}}$		
Attente du r-ième succès (tirage sans remise)	(r, N, p)		$[\![r, Nq+r]\!]$	$\mathbb{P}(X = k) = \frac{r}{k}\frac{\binom{Np}{r}\binom{Nq}{k-r}}{\binom{N}{k}}$		
Poisson	$\lambda \in \mathbb{R}_+$	$\mathcal{P}(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{P}(X = k) = \mathbf{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ