

RÉVISIONS D'ANALYSE RÉELLE : SUITES ET FONCTIONS D'UNE VARIABLE

1	Suites réelles	2
1.1	Convergence et premières propriétés	2
1.2	Suites extraites	3
1.3	Convergence et structure d'ordre	3
1.4	Relations de comparaison	4
1.5	Équations récurrentes linéaires d'ordre 1 et 2 à coefficients constants	6
1.6	Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$	7
1.7	Suites définies implicitement	7
2	Continuité des fonctions réelles d'une variable réelle	8
2.1	Limites et continuité	8
2.2	Théorème des valeurs intermédiaires	8
2.3	Théorème de la bijection	9
2.4	Image continue d'un segment	9
3	Dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle	9
3.1	Définition et premières propriétés	9
3.2	Accroissements finis	10
3.3	Théorème fondamental et formules de Taylor	11

Dans ce chapitre, on passe en revue les notions et résultats essentiels vus en première année concernant les suites réelles et les fonctions réelles (d'une variable réelle). Pour cela, on s'appuie sur la structure d'ordre usuelle de \mathbb{R} , dont on admet la propriété fondamentale suivante :

THÉORÈME 0.1 (PROPRIÉTÉ DE LA BORNE SUPÉRIEURE) *Toute partie non vide et majorée de \mathbb{R} admet une borne supérieure.*

Remarques 0.2 • La propriété précédente est à la base de toute l'analyse réelle ; elle intervient dans les démonstrations de nombreux résultats élémentaires (du théorème de la limite monotone au théorème des valeurs intermédiaires, en passant par certains résultats admis) qui, à leur tour, sont utilisés très fréquemment.

- La propriété précédente n'est pas satisfaite par \mathbb{Q} (on pourra démontrer, à titre d'exercice, que l'ensemble $\{r \in \mathbb{Q} : r^2 < 2\}$ n'admet pas de borne supérieure dans \mathbb{Q} en s'appuyant sur le fait que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, alors qu'il est majoré). C'est une des insuffisances de \mathbb{Q} qui ont motivé l'introduction de \mathbb{R} .

1. Suites réelles

1.1 Convergence et premières propriétés

DÉFINITION 1.1 Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$.

On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge** vers ℓ , et on note alors $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$, si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Remarques 1.2 • Le réel positif $|u_n - \ell|$ doit être interprété comme la *distance* de u_n à ℓ . La condition $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ équivaut donc à $u_n \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$. Elle signifie que u_n est voisin de ℓ à la précision ε ; attention, voisin ne veut pas dire égal : ne pas écrire $u_n = \ell$ à partir d'un certain rang !

- En ces termes, il est clair qu'une suite convergente est bornée.
- Dans le cas d'une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la convergence vers ℓ équivaut donc à :

$$\begin{cases} \forall \alpha < \ell, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq \alpha \\ \forall \beta > \ell, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \leq \beta \end{cases}.$$

Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ , on sait donc comparer les termes d'indice suffisamment grand à n'importe quel réel donné à l'avance *sauf* ℓ .

- On notera que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ si, et seulement si, $|u_n - \ell| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

Remarque 1.3 Il ne peut exister qu'un seul réel ℓ satisfaisant la propriété précédente.

DÉFINITION 1.4 Une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite **convergente** si elle converge vers un réel ℓ (nécessairement unique d'après la remarque), alors appelé **limite** de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et noté

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n.$$

Elle est dite **divergente** dans le cas contraire.

Le caractère convergent ou divergent d'une suite constitue sa **nature**.

DÉFINITION 1.5 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **diverge vers** $+\infty$ (resp. $-\infty$) si :

$$\begin{aligned} & \forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad u_n \geq A \\ & \left(\text{resp. } \forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad u_n \leq A. \right) \end{aligned}$$

Dans ce cas, on dit que $+\infty$ (resp. $-\infty$) est **limite** de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et l'on note :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty \quad \left(\text{resp. } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty \right).$$

Remarques 1.6 • Par définition même, les notions de convergence et de limite sont asymptotiques : elles ne dépendent pas des premiers termes de la suite étudiée.

- On prendra garde à n'utiliser le symbole $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ qu'après avoir justifié l'existence de cette limite !
- Lorsque la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$, elle est non bornée et donc divergente. On dit parfois qu'elle est divergente *de première espèce*, par opposition aux suites qui n'ont pas de limite (ni finie ni infinie), dites divergentes *de seconde espèce*.

On dispose de *théorèmes opératoires sur les limites* dans $\overline{\mathbb{R}}$. Cf. cours de première année pour des énoncés précis. Ils constituent, avec les *croissances comparées*, le premier outil pour déterminer la limite d'une suite à partir de celles des suites de référence et doivent donc être parfaitement maîtrisés.

1.2 Suites extraites

DÉFINITION 1.7 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

On appelle **suite extraite** de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ toute suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ où $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.

On note parfois $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}} = (u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ où $(n_k)_{k \in \mathbb{N}} = \varphi$ est une suite d'entiers strictement croissante.

Exemple 1.8 Les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_{2^n})_{n \in \mathbb{N}}$ sont extraites de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

PROPOSITION 1.9 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle admettant une limite ℓ (finie ou infinie).

Toute suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet la même limite ℓ .

Remarque 1.10 Le résultat précédent peut être utilisé pour montrer qu'une suite donnée diverge : il suffit d'exhiber une sous-suite divergente, ou deux sous-suites convergeant vers des limites différentes.

Exemple 1.11 La suite $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente.

PROPOSITION 1.12 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

Si les deux suites extraites principales $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers une même limite ℓ , alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge elle-même vers ℓ .

1.3 Convergence et structure d'ordre

PROPOSITION 1.13 (PRINCIPE DE PROLONGEMENT DES INÉGALITÉS) Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont toutes deux convergentes de limites respectives ℓ et ℓ' , alors $\ell \leq \ell'$.

Remarques 1.14 • Avant de « passer à la limite » dans une inégalité, encore faut-il avoir justifié l'existence de ces limites !

- L'hypothèse plus forte $u_n < v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ne permet pas de conclure que $\ell < \ell'$ (trouver un contre-exemple); on peut seulement en déduire que $\ell \leq \ell'$. On retiendra que lors d'un passage à la limite, les inégalités strictes deviennent larges.

PROPOSITION 1.15 (THÉORÈME DES GENDARMES) Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites réelles telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n \leq w_n$.

Si les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers la même limite ℓ , alors la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge elle aussi vers ℓ .

Remarque 1.16 En pratique, on utilisera très souvent le résultat précédent sous la forme suivante : pour montrer qu'une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ , il suffit de trouver une suite réelle $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente vers 0 telle que $|u_n - \ell| \leq \varepsilon_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

THÉORÈME 1.17 (DE LA LIMITE MONOTONE) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle croissante. Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée, alors elle est convergente ; sinon, elle diverge vers $+\infty$.

Remarque 1.18 On dispose bien sûr d'un résultat similaire pour les suites réelles décroissantes.

DÉFINITION 1.19 Deux suites réelles sont dites **adjacentes** si l'une est croissante, l'autre décroissante et si la différence des deux converge vers 0.

COROLLAIRE 1.20 (THÉORÈME DES SUITES ADJACENTES) Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes, alors elles convergent vers une limite commune ℓ ; de plus, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante, on a $u_p \leq \ell \leq v_q$ pour tous $p, q \in \mathbb{N}$.

1.4 Relations de comparaison

En présence d'une forme indéterminée lors de l'application des théorèmes opératoires sur les limites, il est nécessaire de comparer le comportement asymptotique (vitesse de convergence/divergence, etc.) des différentes composantes de l'expression étudiée. Les notions de *négligeabilité* et d'*équivalence* fournissent un cadre rigoureux pour ce type de considérations. Celle de *domination*, hors-programme, est de la même veine ; elle est brièvement introduite car elle pourra être utile dans les chapitres suivants.

Dans toute cette section, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désignent des suites réelles.

DÉFINITION 1.21 On dit que (u_n) est **négligeable** par rapport à (v_n) ou que (v_n) est **prépondérante** devant (u_n) , et on note $u_n = o(v_n)$, si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :

- (i) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n| \leq \varepsilon |v_n|$;
- (ii) il existe une suite (ε_n) convergente vers 0 et $N \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq N, u_n = \varepsilon_n v_n$;
- (iii) (si (v_n) ne s'annule pas au delà d'un certain rang) la suite (u_n/v_n) converge vers 0.

DÉFINITION 1.22 On dit que (u_n) est **dominée** par (v_n) , et on note $u_n = \mathcal{O}(v_n)$, si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :

- (i) $\exists M \in \mathbb{R}_+, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n| \leq M |v_n|$;
- (ii) il existe une suite bornée (M_n) et $N \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq N, u_n = M_n v_n$;
- (iii) (si (v_n) ne s'annule pas au delà d'un certain rang) la suite (u_n/v_n) est bornée.

Remarque 1.23 Dans les deux définitions précédentes, l'énoncé (iii) n'a de sens que si la suite (v_n) ne s'annule pas (à partir d'un certain rang). On remarquera cependant que si $u_n = o(v_n)$ ou $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ alors, à partir d'un certain rang, $v_n = 0$ implique $u_n = 0$.

Exemples 1.24 • $u_n = \mathcal{O}(1)$ signifie que (u_n) est bornée ;

- $u_n = o(1)$ signifie que (u_n) converge vers 0 et, plus généralement, $u_n = \ell + o(1)$ signifie que (u_n) converge vers ℓ (cf. remarque suivante).

PROPOSITION 1.25 (i) la relation de négligeabilité est transitive : si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$;

(ii) si $u_n = o(v_n)$ et $v_n \sim w_n$ alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $u_n = o(\lambda w_n)$;

(iii) l'ensemble des suites négligeables devant (u_n) est un espace vectoriel : si $v_n = o(u_n)$ et $w_n = o(u_n)$ alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda v_n + w_n = o(u_n)$;

(iv) les $o(\cdot)$ sont multiplicatifs : $u_n \cdot o(v_n) = o(u_n v_n)$.

Remarque 1.26 (Beauté et danger des notations de Landau) Les notations o et \mathcal{O} ont été introduites par Landau et ont été consacrées par l'usage. Telles qu'elles ont été introduites dans les définitions précédentes,

les notations $u_n = o(v_n)$ et $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ ne sont pas pratiques puisqu'elles obligent à faire les comparaisons en dehors des calculs.

Pour contourner le problème, on s'autorise donc à utiliser la notation $o(v_n)$ pour désigner une suite *indéterminée* négligeable par rapport à (v_n) (et de même pour \mathcal{O}). Les notations $o(v_n)$ et $\mathcal{O}(v_n)$ peuvent alors être intégrées aux calculs et y jouer le même rôle que les autres termes, à ceci près qu'elles sont indéterminées, ce qui impose de prendre quelques précautions.

Ainsi, une même notation peut intervenir à plusieurs reprises dans une expression sans désigner la même suite : par exemple, $e^{-n} - 1/n = o(1) - o(1)$ n'est pas nul (mais seulement $o(1)$...), contrairement à ce que l'application irréflechie d'un réflexe bien naturel pourrait pousser à écrire !

Autre danger induit par ces notations : leur utilisation dans une égalité lui retire son caractère symétrique ; par exemple, on a la chaîne d'« égalités » $e^{-n} = o(1) = o(n)$, mais (e^{-n}) n'est pas la seule suite convergant vers 0 et il existe des suites (par exemple (\sqrt{n})) négligeables devant (n) qui ne convergent pas vers 0 (en d'autres termes, les « égalités » réciproques $o(1) = e^{-n}$ et $o(n) = o(1)$ sont fausses !). Les égalités doivent donc être écrites et lues exclusivement de gauche à droite lorsqu'elles font intervenir les notations de Landau.

DÉFINITION 1.27 On dit que (u_n) et (v_n) sont **équivalentes**, et on note $u_n \sim v_n$, si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :

- (i) $u_n = v_n + o(v_n)$;
- (ii) il existe une suite (λ_n) convergeant vers 1 et $N \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq N$, $u_n = \lambda_n v_n$;
- (iii) (si (v_n) ne s'annule pas au delà d'un certain rang) la suite (u_n/v_n) converge vers 1.

Remarques 1.28 On renvoie au cours de première année pour des énoncés précis sur les équivalents et leur manipulation.

- Les équivalents sont compatibles aux produits et donc aux quotients, aux puissances entières et même réelles.
- En revanche, les équivalents ne sont pas compatibles avec l'addition ; en d'autres termes, on ne somme pas d'équivalents ! Lorsqu'on recherche un équivalent d'une somme $u_n + v_n$, soit l'un des termes est négligeable devant l'autre, par exemple $u_n = o(v_n)$, et alors $u_n + v_n \sim v_n$ par définition même, soit ce n'est pas le cas et alors on fait un développement asymptotique.
- Les équivalents ne sont pas non plus compatibles à la composition à gauche : $u_n \sim v_n$ n'implique pas en général $f(u_n) \sim f(v_n)$. Deux cas reviennent souvent en pratique :
 - Le cas de la fonction exponentielle : il est clair que $e^{u_n} \sim e^{v_n}$ équivaut à $u_n - v_n \rightarrow 0$, condition qui n'est ni nécessaire ni suffisante pour que $u_n \sim v_n$.
 - Le cas du logarithme : si (u_n) et (v_n) sont deux suites équivalentes de réels strictement positifs, alors

$$\ln u_n = \ln(v_n + o(v_n)) = \ln v_n + \ln(1 + o(1)) = \ln v_n + o(1),$$

et l'on observe ici encore que $u_n \sim v_n$ n'implique pas $\ln u_n \sim \ln v_n$. Le calcul précédent montre toutefois que $\ln u_n \sim \ln v_n$ si $|\ln v_n| \rightarrow +\infty$; on pourra donc retenir que $u_n \sim v_n \Rightarrow \ln u_n \sim \ln v_n$ si $u_n \sim v_n > 0$ tendent vers 0 ou $+\infty$ (mais il vaut mieux en pratique refaire le petit raisonnement précédent).

À partir des équivalents usuels (à connaître sans hésitation, cf. formulaire), il est ainsi souvent possible d'obtenir un équivalent simple d'une expression et d'en déduire, par exemple, sa limite :

PROPOSITION 1.29 (i) Si $\ell \neq 0$, alors $u_n \sim \ell$ équivaut à $u_n \rightarrow \ell$.

(ii) Si $u_n \sim v_n$, alors les suites (u_n) et (v_n) sont de même nature et, le cas échéant, de même limite.

(iii) Si $u_n \sim v_n$, alors u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.

Remarque 1.30 Les seules suites équivalentes à 0 sont les suites nulles à partir d'un certain rang, dont l'étude asymptotique est d'un intérêt limité. On n'écrira donc jamais d'équivalent à 0.

Remarque 1.31 On décline facilement (exercice !) le théorème des gendarmes aux équivalents : étant données trois suites réelles (u_n) , (v_n) et (w_n) telles que $u_n \leq v_n \leq w_n$ pour tout n assez grand, $u_n \sim w_n$ implique $u_n \sim v_n \sim w_n$.

1.5 Équations récurrentes linéaires d'ordre 1 et 2 à coefficients constants

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

PROPOSITION-DÉFINITION 1.32 On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **arithmétique** s'il existe un réel b , appelé **raison** de la suite, tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + b.$$

Dans ces conditions, on a $u_n = u_0 + nb$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et :

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, \quad p \leq q \implies \sum_{n=p}^q u_n = (q - p + 1) \frac{u_p + u_q}{2}.$$

Remarque 1.33 La limite d'une suite arithmétique est évidente à partir de son expression explicite.

PROPOSITION-DÉFINITION 1.34 On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **géométrique** s'il existe un réel a , appelé **raison** de la suite, tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n.$$

Dans ces conditions, on a $u_n = a^n u_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et, si $a \neq 1$:

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, \quad p \leq q \implies \sum_{n=p}^q u_n = u_p \frac{1 - a^{q-p+1}}{1 - a}.$$

Remarque 1.35 Une suite géométrique de raison a est convergente si, et seulement si, $|a| < 1$ ou $a = 1$. Plus précisément, la limite d'une suite géométrique se déduit de la proposition suivante.

PROPOSITION 1.36 Soit $a \in \mathbb{R}$.

- (i) si $|a| < 1$, la suite $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 ;
- (ii) si $a = 1$, la suite $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante égale à 1...
- (iii) si $a > 1$, la suite $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$;
- (iv) si $a \leq -1$, la suite $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

PROPOSITION-DÉFINITION 1.37 La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite **arithmético-géométrique** s'il existe des réels $a \neq 1$ et b tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + b.$$

Dans ces conditions, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, $|a| < 1$, et la convergence a alors lieu vers le seul point fixe ℓ de la fonction $x \mapsto ax + b$. Plus précisément, la suite $(u_n - \ell)$ est géométrique de raison a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \ell + a^n(u_0 - \ell) \quad \text{avec} \quad \ell = \frac{b}{1 - a}.$$

PROPOSITION 1.38 On suppose qu'il existe a et b réels tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

Le polynôme $\chi = X^2 - aX - b$ est appelé **polynôme caractéristique** associé à la relation de récurrence précédente.

(i) si χ admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 , alors il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n;$$

(ii) si χ admet une racine double r , alors il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\lambda + \mu n)r^n;$$

(iii) si χ admet deux racines complexes conjuguées $r_{1/2} = r e^{\pm i\theta}$ ($r > 0, \theta \in \mathbb{R}$), alors il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta)) r^n.$$

Dans les trois cas, le couple (λ, μ) est déterminé de façon unique par les conditions initiales u_0 et u_1 .

1.6 Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

Pour de telles suites se pose en premier lieu la question de l'existence. La notion d'intervalle stable permet d'y répondre. Dans toute cette section, f désigne une fonction définie sur un intervalle de \mathbb{R} .

DÉFINITION 1.39 Un intervalle I de \mathbb{R} est dit **stable** par f si $f(I) \subset I$, i.e. si pour tout $x \in I, f(x) \in I$.

PROPOSITION 1.40 Si I est un intervalle stable par f alors pour tout $a \in I$, il existe une unique suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_0 = a$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

On suppose dans la suite de cette section que I est un intervalle stable par f et on se donne une suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque 1.41 Tout intervalle stable J est attractif au sens où, si un terme de la suite (u_n) appartient à J , alors tous les suivants appartiennent aussi à J (récurrence immédiate).

Concernant la limite (si elle existe) d'une telle suite, le seul résultat au programme est le suivant.

PROPOSITION-DÉFINITION 1.42 Si la suite (u_n) converge vers une limite ℓ en laquelle f est continue, alors $f(\ell) = \ell$ (on dit que ℓ est **point fixe** de f).

Ainsi, si f est continue sur un intervalle stable I contenant u_0 , les seules limites éventuelles de (u_n) sont les points fixes de f et les bornes de I (n 'appartenant pas à I).

Remarque 1.43 Pour déterminer les points fixes de f , on pourra déterminer les points d'annulation de la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ et, plus généralement, son signe qui sera utile plus tard. Cela peut être effectué par une étude des variations de g .

En pratique, pour établir que (u_n) tend vers ℓ , on démontre souvent, par un argument de monotonie de (u_n) , la convergence de la suite puis on écarte dans la liste des limites possibles tous les candidats sauf ℓ . Dans cette optique, le résultat suivant, hors-programme, peut être utile.

PROPOSITION 1.44 Soit I un intervalle stable par f contenant u_0 .

(i) Si f est croissante sur I , alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone ; son sens de variation est donné par le signe de $u_1 - u_0 = g(u_0)$.

(ii) Si f est décroissante sur I , alors les deux suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones de sens contraires.

Remarque 1.45 Dans le second cas, les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont récurrentes associées à la fonction croissante $f \circ f$. L'étude de leurs limites relève alors du premier point, la question étant de savoir si elles ont mêmes limites ou des limites distinctes.

On renvoie aux T.D. pour plus de détails et des exemples. Comme on le verra plus tard, l'inégalité des accroissements finis fournit également une méthode très efficace pour l'étude des récurrences $u_{n+1} = f(u_n)$.

1.7 Suites définies implicitement

Il s'agit de suites dont le terme général u_n est défini par une relation de la forme $f_n(u_n) = 0$, où (f_n) est une suite de fonctions auxiliaire.

- Le fait que (u_n) soit bien définie (existence et unicité des termes u_n) provient souvent de l'étude des variations des fonctions f_n qui permet d'appliquer le théorème de la bijection sur un intervalle bien choisi.

- On étudie ensuite la monotonie de (u_n) en s'intéressant au signe de $f_n(u_{n+1})$ ou $f_{n+1}(u_n)$. En effet, la comparaison entre $f_n(u_n) = 0$ et $f_n(u_{n+1})$ et la monotonie de f_n permettent alors de comparer u_n et u_{n+1} . Cf. T.D. pour des exemples.

2. Continuité des fonctions réelles d'une variable réelle

2.1 Limites et continuité

Dans ce paragraphe, on se donne une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I non trivial de \mathbb{R} (ou éventuellement un ensemble A réunion d'intervalles non triviaux disjoints) ainsi qu'un réel a , élément ou borne de I . Certaines des définitions et résultats suivants qui concernent les limites peuvent être étendus à de légères modifications techniques près aux cas $a = \pm\infty$ et/ou $\ell = \pm\infty$.

Par définition, la fonction f admet pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ en a si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I, \quad |x - a| \leq \delta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Lorsque $a \in I$, elle est dite continue en a si elle admet $f(a)$ pour limite en a .

Il apparaît sur les définitions que :

- Si $a \in I$: la seule limite possible pour f en a est $f(a)$, et l'existence d'une limite pour f en a équivaut donc à la continuité de f en a ;
- Si $a \notin I$: la fonction f admet une limite finie en a si, et seulement si, elle peut être prolongée par continuité à $I \cup \{a\}$.

PROPOSITION 2.1 (CARACTÉRISATION SÉQUENTIELLE DE LA LIMITE) Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

La fonction f admet pour limite ℓ en a si, et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de I convergeant vers a , la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .

On dispose de théorèmes opératoires pour les limites et donc pour la continuité. On renvoie au cours de première année pour des énoncés précis. Comme dans le cas des limites de suites, on établit des résultats en lien avec la structure d'ordre (principe de prolongement des inégalités, théorème des gendarmes, etc.). Le théorème de la limite monotone prend une forme particulière selon que la limite est considérée à gauche ou à droite, il est énoncé ci-dessous pour une fonction croissante.

THÉORÈME 2.2 (DE LA LIMITE MONOTONE) Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante.

(i) La fonction f admet une limite à gauche en tout point a de $I \cup \{\sup I\}$:

- > si f est majorée sur $I \cap]-\infty, a[$, alors f admet pour limite finie

$$f(a^-) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \sup_{x < a} f(x) ;$$

- > si f n'est pas majorée sur $I \cap]-\infty, a[$, alors $f(x)$ diverge vers $+\infty$ lorsque $x \rightarrow a$, $x < a$.

(ii) La fonction f admet une limite à droite en tout point a de $I \cup \{\inf I\}$:

- > si f est minorée sur $I \cap]a, +\infty[$, alors f admet pour limite finie

$$f(a^+) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \inf_{x > a} f(x) ;$$

- > si f n'est pas minorée sur $I \cap]a, +\infty[$, alors $f(x)$ diverge vers $-\infty$ lorsque $x \rightarrow a$, $x > a$.

Enfin, les relations de comparaison (négligeabilité, domination, équivalence) entre fonctions peuvent être définies au voisinage d'un point a éventuellement infini.

2.2 Théorème des valeurs intermédiaires

THÉORÈME 2.3 (DES VALEURS INTERMÉDIAIRES) Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$ (a, b réels) et à valeurs réelles.

Toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ est atteinte par la fonction f sur $[a, b]$.

Remarque 2.4 En contraposant le résultat précédent, on démontre que, sur un intervalle, une fonction continue qui ne s'annule pas garde un signe constant.

2.3 Théorème de la bijection

Le théorème suivant est en partie admis.

THÉORÈME 2.5 Soit f une fonction continue strictement monotone sur un intervalle I et à valeurs réelles. La fonction f induit une bijection continue de I sur l'intervalle $J = f(I)$ et sa réciproque f^{-1} est continue et strictement monotone de J dans I , de même sens de variations que f .

2.4 Image continue d'un segment

Le théorème suivant est admis.

THÉORÈME 2.6 Une fonction continue sur un segment de \mathbb{R} et à valeurs réelles est bornée et atteint ses bornes.

3. Dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle

3.1 Définition et premières propriétés

Soient I un intervalle non trivial de \mathbb{R} et $a \in I$.

PROPOSITION-DÉFINITION 3.1 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) la fonction

$$I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

admet une limite finie ℓ en a ;

(ii) il existe une fonction $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue en a telle que :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = f(a) + (x - a)\varphi(x) ;$$

(iii) f admet un développement limité à l'ordre 1 en a , i.e. il existe un réel α tel que :

$$f(x) = f(a) + \alpha(x - a) + o(x - a), \quad x \rightarrow a.$$

Lorsqu'elles sont satisfaites, on dit que f est **dérivable** en a et le réel $\ell = \varphi(a) = \alpha$ est appelé **nombre dérivé** de f en a et noté $f'(a)$.

Remarques 3.2 • Chacune des propriétés précédentes peut être ramenée à l'origine en posant $x = a + h$, où $h = x - a$ tend vers 0 lorsque $x \rightarrow a$.

• Interprétation géométrique : lorsque f est dérivable en a , le nombre dérivé $f'(a)$ représente la pente de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a .

THÉORÈME 3.3 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Si f est dérivable en a , alors f est continue en a . La réciproque est fautive en général.

On renvoie au cours de première année pour :

- les notions de dérivabilité à gauche et à droite en a et le lien avec la dérivabilité en a ;
- la notion de dérivabilité sur un intervalle et la définition de la fonction dérivée ;
- les théorèmes opératoires sur les fonctions dérivables ; on rappelle seulement ci-dessous le cas d'une composée de fonctions dérivables :

PROPOSITION 3.4 Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur I et $\varphi : J \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle J telle que $\varphi(J) \subset I$.

Si φ est dérivable en $\alpha \in J$ tel que $\varphi(\alpha) = a$ et si f est dérivable en a , alors la composée $f \circ \varphi$ est dérivable en α avec $(f \circ \varphi)'(\alpha) = \varphi'(\alpha)f'(\varphi(\alpha))$.

- la notion de dérivée d'ordre supérieur, celle de fonctions de classe \mathcal{C}^n ; on rappelle une formule utile :

THÉORÈME 3.5 (FORMULE DE LEIBNIZ) Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions.

Si f et g sont n fois dérivables sur I , alors leur produit fg l'est aussi et

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

3.2 Accroissements finis

Soient $a < b$ deux réels et I un intervalle non trivial de \mathbb{R} . On note I° et on appelle *intérieur* de I l'intervalle ouvert obtenu en retirant ses bornes à I .

LEMME 3.6 Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Si f admet en $c \in I^\circ$ un extremum local et si f est dérivable en c , alors $f'(c) = 0$.

Remarques 3.7 • La réciproque est fautive, comme le montre l'exemple de la fonction $x \longmapsto x^3$ en 0.

- L'hypothèse $c \in I^\circ$ est essentielle, comme l'illustre l'exemple de la fonction $x \in [0, 1] \longmapsto x$, qui admet un maximum local en 1, sans que sa dérivée ne s'y annule...

THÉORÈME 3.8 (ROLLE) Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle définie et continue sur un segment $[a, b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$.

Si $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

THÉORÈME 3.9 (DES ACCROISSEMENTS FINIS) Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle définie et continue sur un segment $[a, b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$.

Il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

THÉORÈME 3.10 Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle définie et continue sur un intervalle I et dérivable sur I° .

(i) La fonction f est croissante sur l'intervalle I si, et seulement si, $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I^\circ$.

Si cette inégalité est stricte sauf en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante.

(ii) La fonction f est décroissante sur l'intervalle I si, et seulement si, $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I^\circ$.

Si cette inégalité est stricte sauf en un nombre fini de points, alors f est strictement décroissante.

(iii) La fonction f est constante sur l'intervalle I si, et seulement si, $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I^\circ$.

Le résultat suivant est hors-programme mais classique et à savoir redémontrer.

COROLLAIRE 3.11 Soient $a \in I$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur I et dérivable en tout point de $I \setminus \{a\}$.

Si f est continue en a et si sa dérivée f' admet une limite finie ℓ au point a , alors f est dérivable en a avec $f'(a) = \ell$.

Remarque 3.12 Si on suppose f de classe \mathcal{C}^1 sur $I \setminus \{a\}$, alors le résultat précédent apporte la classe \mathcal{C}^1 de f sur I .

THÉORÈME 3.13 (INÉGALITÉ DES ACCROISSEMENTS FINIS) Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie et continue sur I et dérivable sur I° .

(i) S'il existe des réels m et M tels que pour tout $x \in I^\circ$, $m \leq f'(x) \leq M$, alors :

$$\forall a, b \in I, \quad a \leq b \implies m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a).$$

(ii) S'il existe un réel M tel que pour tout $x \in I^\circ$, $|f'(x)| \leq M$, alors :

$$\forall a, b \in I, \quad |f(b) - f(a)| \leq M |b - a|.$$

Remarque 3.14 L'inégalité précédente est particulièrement utile pour étudier certaines suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Si la fonction f est dérivable sur un intervalle stable I et s'il existe un réel $k < 1$ tel que $|f'(x)| \leq k$ pour tout $x \in I$ (on dit que la fonction f est *contractante*), alors pour tout point fixe $\ell \in I$ de f , on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leq k |u_n - \ell|$$

et donc, par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|$$

d'où, comme $0 \leq k < 1$, la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers ℓ .

3.3 Théorème fondamental et formules de Taylor

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I non trivial de \mathbb{R} .

THÉORÈME 3.15 Soit $a \in I$.

Si f est continue sur I , alors la fonction $F : x \in I \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est la primitive de f sur I qui s'annule au point a .

THÉORÈME 3.16 (THÉORÈME FONDAMENTAL DU CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL) Si f est de classe \mathcal{C}^1 sur I , alors :

$$\forall a, x \in I, \quad f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt.$$

L'objet des formules de Taylor ci-dessous est d'estimer l'erreur commise en approchant f , n fois dérivable en un point $a \in I$, par son *développement de Taylor* en a à l'ordre n :

$$T_{a,n}f : x \mapsto \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k.$$

THÉORÈME 3.17 (FORMULE DE TAYLOR AVEC RESTE INTÉGRAL) Si f est de classe \mathcal{C}^{n+1} sur I alors :

$$\forall a, x \in I, \quad f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + \int_a^x \frac{(x - t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

COROLLAIRE 3.18 (INÉGALITÉ DE TAYLOR-LAGRANGE) On suppose f de classe \mathcal{C}^{n+1} sur I .

S'il existe un réel M tel que pour tout $t \in I$, $|f^{(n+1)}(t)| \leq M$, alors :

$$\forall a, x \in I, \quad \left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k \right| \leq M \frac{|x - a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

THÉORÈME 3.19 (THÉORÈME DE TAYLOR-YOUNG) Si f est de classe \mathcal{C}^n sur I , alors f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de tout point $a \in I$ donné par :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + o((x - a)^n), \quad x \rightarrow a.$$

Remarques 3.20 • Tous ces résultats sont déjà connus pour $n = 0$: définition de la dérivabilité, théorème fondamental, égalité et inégalité des accroissements finis.

• Il faut noter une différence fondamentale entre les formules ci-dessus : la formule de Taylor-Young ne donne qu'une information locale, au contraire des autres qui donnent une information globale.