

Programme de colle : semaine 17
du 12 au 16 février 2018

Fonctions de plusieurs variables : calcul différentiel du premier ordre

Les fonctions considérées dans ce chapitre sont définies sur un ouvert de \mathbb{R}^n et à valeurs réelles.

1. Objets du calcul différentiel du premier ordre
Dérivées partielles et gradient. Dérivées directionnelles. Développement limité : définition, unicité, expression à l'aide du gradient ou des dérivées partielles, hyperplan tangent, lien entre dérivée directionnelle et gradient.
2. Fonctions de classe \mathcal{C}^1
Définition et théorème fondamental (admis) : toute fonction de classe \mathcal{C}^1 admet en tout point un développement limité d'ordre 1 (donc est continue). Théorèmes opératoires (en particulier, dérivation d'une composée $t \in \mathbb{R} \mapsto f(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$).
3. Calcul différentiel du second ordre
Dérivées partielles secondes. Fonctions de classe \mathcal{C}^2 , théorèmes opératoires, théorème de Schwarz (admis), matrice et forme hessienne en un point. Dérivée directionnelle seconde, développement limité d'ordre 2.

Introduction en TD aux problèmes d'extremums sur un ouvert : définition, lien avec les points critiques, exemples.

Endomorphismes et matrices symétriques

1. Endomorphismes et matrices symétriques
Endomorphismes symétriques : définition, caractérisation matricielle, endomorphismes symétriques parmi les projecteurs, si u symétrique stabilise F alors il stabilise F^\perp . Réduction des endomorphismes symétriques. Réduction des matrices symétriques réelles.
2. Application à l'étude du signe d'une forme quadratique
Formes quadratiques sur \mathbb{R}^n : définition, représentation matricielle. Forme polaire, matrice symétrique et endomorphisme symétrique associés à une forme quadratique. Inégalité $\alpha \|x\|^2 \leq q(x) \leq \beta \|x\|^2$ où α et β désignent les plus petite et grande valeur propre de la matrice symétrique associée à q , avec cas d'égalité. Étude du signe d'une forme quadratique en fonction des valeurs propres de la matrice symétrique associée, application à la caractérisation des formes bilinéaires positives et définies-positives.