

Programme de colle : semaine 16
du 5 au 9 février 2018

Espaces euclidiens

1. Bases orthonormales

Définition, expression du produit scalaire et de la norme en base orthonormale, coordonnées d'un vecteur en base orthonormale. Existence, matrice de passage entre deux bases orthonormales, matrices orthogonales. Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

2. Supplémentaire orthogonal

Théorème fondamental : si F est un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien E , alors F et F^\perp sont supplémentaires dans E , $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$ et $F^{\perp\perp} = F$. Théorème de la base orthonormale incomplète, orthogonal d'un hyperplan. Projecteurs orthogonaux : définition, caractérisation du projeté orthogonal, expression dans une base orthonormale $(v_i)_{i=1}^r$ du sous-espace sur lequel on projette, matrice en base orthonormale en fonction des colonnes de coordonnées des v_i .

3. Application aux problèmes de minimisation

Distance à un sous-espace vectoriel. Pseudo-solutions d'un système linéaire : pour $A \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang p et $B \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il existe un et un seul vecteur $X \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ minimisant la quantité $\|AX - B\|$; ce vecteur est l'unique solution du système de Cramer ${}^tAAX = {}^tAB$ (ce dernier point n'est pas au programme, il faut savoir le retrouver).

Fonctions de plusieurs variables : calcul différentiel du premier ordre

Les fonctions considérées dans ce chapitre sont définies sur un ouvert de \mathbb{R}^n et à valeurs réelles.

1. Objets du calcul différentiel du premier ordre

Dérivées partielles et gradient. Dérivées directionnelles. Développement limité : définition, unicité, expression à l'aide du gradient ou des dérivées partielles, hyperplan tangent, lien entre dérivée directionnelle et gradient. Interprétation du gradient.

2. Fonctions de classe \mathcal{C}^1

Définition et théorème fondamental (admis) : toute fonction de classe \mathcal{C}^1 admet en tout point un développement limité d'ordre 1 (donc est continue). Théorèmes opératoires (en particulier, dérivation d'une composée $t \in \mathbb{R} \mapsto f(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$).

Introduction en TD aux problèmes d'extremums sur un ouvert : définition, lien avec les points critiques, exemples.

Endomorphismes et matrices symétriques (pas encore d'exercice traité en classe)

1. Endomorphismes et matrices symétriques

Endomorphismes symétriques : définition, caractérisation matricielle, endomorphismes symétriques parmi les projecteurs, si u symétrique stabilise F alors il stabilise F^\perp . Réduction des endomorphismes symétriques. Réduction des matrices symétriques réelles.