Programme de colle : semaine 14

du 22 au 26 janvier 2018

Lois continues classiques

1. Loi uniforme
   Définition par la densité, fonction caractéristique, transformation affine. Moments.
2. Loi exponentielle
   Définition par la densité, fonction caractéristique, transformation linéaire. Moments. Caractérisation par l'absence de mémoire.
3. Loi γ
   Définition par la densité. Moments. Stabilité : somme de variables aléatoires X_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, mutuellement indépendantes suivant des lois $\gamma(\nu_i)$ puis $\mathcal{E}(1)$.
4. Loi normale ou gaussienne
   Définition par la densité, notation $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ pour une espérance m et une variance σ^2, transformation affine. Étude de la densité et de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Moments. Stabilité : somme de variables aléatoires X_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, mutuellement indépendantes suivant des lois $\mathcal{N}(m_i, \sigma_i^2)$.

Remarque. Les lois Γ sont désormais hors-programme.

Espaces euclidiens

1. Bases orthonormales
   Définition, expression du produit scalaire et de la norme en base orthonormale, coordonnées d'un vecteur en base orthonormale. Existence, matrice de passage entre deux bases orthonormales, matrices orthogonales. Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
2. Supplémentaire orthogonal
   Théorème fondamental : si F est un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien E, alors F et $F^\perp$ sont supplémentaires dans E, $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$ et $F^{\perp\perp} = F$. Théorème de la base orthonormale incomplète, orthogonal d'un hyperplan. Projecteurs orthogonaux : définition, caractérisation du projeté orthogonal, expression dans une base orthonormale $(v_i)_{i=1}^r$ du sous-espace sur lequel on projette, matrice en base orthonormale en fonction des colonnes de coordonnées des v_i.
3. Application aux problèmes de minimisation *(à partir de jeudi)*
   Distance à un sous-espace vectoriel. Pseudo-solutions d'un système linéaire : pour $A \in \mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang p et $B \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il existe un et un seul vecteur $X \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ minimisant la quantité $\|AX - B\|$; ce vecteur est l'unique solution du système de Cramer ${}^t\!AAX = {}^t\!AB$ (ce dernier point n'est pas au programme, il faut savoir le retrouver).