ECS2 – Lycée La Bruyère, Versailles
Mathématiques

Programme de colle : semaine 10

du 11 au 15 décembre 2017

Diagonalisation

1. Diagonalisation naïve des matrices carrées et applications
   Définition : une matrice carrée est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale. Définition des valeurs et colonnes propres. Méthode de diagonalisation effective : recherche d'une matrice inversible P dont les colonnes sont propres pour A. Méthode pratique de recherche des valeurs propres. Application au calcul des puissances d'une matrice carrée.
2. Sous-espaces stables par un endomorphisme
   Sous-espaces stables, endomorphisme induit sur un sous-espace stable. Caractérisation matricielle. Cas de sous-espaces supplémentaires stables.
3. Éléments propres d'un endomorphisme et d'une matrice carrée
   Éléments propres d'un endomorphisme. Éléments propres d'une matrice carrée ; valeurs propres d'une matrice triangulaire. Polynômes annulateurs, existence en dimension finie, toute valeur propre est racine d'un polynôme annulateur donné, réciproque fausse. La somme de plusieurs sous-espaces propres est directe, majoration du nombre de valeurs propres en dimension finie.
4. Diagonalisabilité d'un endomorphisme et d'une matrice carrée
   Endomorphismes diagonalisables : existence d'une base de vecteurs propres i.e. dans laquelle la représentation matricielle est diagonale, caractérisation par les sous-espaces propres ou leurs dimensions, cas d'un endomorphisme admettant n valeurs propres en dimension n. Matrices carrées diagonalisables, caractérisation par les sous-espaces propres ou leurs dimensions, cas d'une matrice de $\mathbf{M}_n(\mathbb{K})$ admettant n valeurs propres, lien avec la trace.

Compléments sur les variables aléatoires réelles, variables aléatoires à densité

1. Généralités sur les variables aléatoires réelles
   Notion de variable aléatoire réelle. Théorèmes opératoires (admis). Loi d'une variable aléatoire réelle, tribu associée. Fonction de répartition d'une variable aléatoire, propriétés caractéristiques, caractérisation de la loi par la fonction de répartition, cas d'une variable discrète. Variables aléatoires indépendantes.
2. Variables aléatoires à densité
   Une variable aléatoire réelle X est à densité si sa fonction de répartition F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ privé éventuellement d'un nombre fini de points. Densité d'une telle variable X : toute fonction f_X à valeurs positives ou nulles sur $\mathbb{R}$, égale à la dérivée de la fonction de répartition sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en un nombre fini de points. Existence et interprétation d'une densité : $\mathbb{P}(X = x) = 0$ mais $\mathbb{P}(x < X \leqslant x + h) \sim f_X(x) \cdot h$ lorsque $h \to 0$ (si $f_X(x) = F'_X(x) \neq 0$). Expression intégrale de la fonction de répartition à l'aide de la densité, caractérisation de la loi par la densité. Exemple des lois uniforme sur $[0, 1]$ et exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Densité de $Y = \varphi(X)$ pour quelques fonctions φ classiques (le « premier théorème de transfert » n'a pas été énoncé).
3. Moments d'une variable aléatoire à densité
   Moment d'ordre n d'une variable X à densité f_X : $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n f_X(t)\,\mathrm{d}t$ en cas de convergence (automatiquement absolue, les seules bornes de généralisation en lesquelles la convergence n'est pas automatique sont $\pm\infty$). Espérance, positivité, existence pour une variable presque sûrement bornée, théorème de transfert : espérance de $\varphi(X)$ lorsque φ est continue sauf peut-être en un nombre fini de points (avec toutes les réserves nécessaires), développement de $\mathbb{E}(aX + b)$. Variance, l'existence équivaut à celle du moment d'ordre 2, formule de Koënig-Huygens, développement de $\mathbb{V}(aX + b)$.

T.S.V.P.

4. Fonctions de variables aléatoires réelles (tout est admis dans ce paragraphe)
Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes à densités f_X et f_Y dont le produit de convolution $f_X \star f_Y$ est continu sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en un nombre fini de points (condition réalisée si f_X ou f_Y est bornée), alors $f_X \star f_Y$ est une densité de $X + Y$. Les résultats suivant concernent tous types de variables aléatoires (non nécessairement discrètes ou à densité) : existence d'une espérance par domination, linéarité et croissance de l'espérance, espérance du produit et variance de la somme de deux variables indépendantes.