ECS2 – Lycée La Bruyère, Versailles
Mathématiques

Programme de colle : semaine 8

du 20 au 24 novembre 2017

Intégrales généralisées

1. Rappels sur les intégrales définies (à travailler seul par les étudiants)
   Rappel succint de la définition, sommes de Riemann. Relation de Chasles, linéarité, positivité (avec cas d'égalité), croissance de l'intégrale, inégalité triangulaire intégrale. Primitives, différentes formes du théorème fondamental, intégration par parties, changement de variable.
2. Notion d'intégrale généralisée
   Sur un intervalle semi-ouvert : définition, intégrales faussement généralisées, la nature de l'intégrale ne dépend que du comportement de la fonction au voisinage de la borne de généralisation, reste d'une intégrale généralisée convergente, convergence du reste vers 0, nature et calcul d'une intégrale grâce à une primitive. Exemples de références : intégrales de Riemann, $\int_0^{+\infty} \mathbf{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$. Sur un intervalle ouvert. Sur un intervalle privé d'un nombre fini de points. Théorèmes opératoires.
3. Propriétés des intégrales généralisées convergentes
   Linéarité. Relation de Chasles. Positivité et croissance (avec cas d'égalité).
4. Théorème de comparaison pour les fonctions positives
   Lemme fondamental et théorème de comparaison. Déclinaisons du théorème de comparaison aux cas où $f = o(g)$ ou $f \sim g$ au voisinage d'une borne de généralisation. Comparaison aux intégrales de Riemann.
5. Intégrales absolument convergentes
   Définition, la convergence absolue implique la convergence, inégalité triangulaire intégrale. Notion d'intégrale semi-convergente.
6. Outils de calcul intégral
   Changement de variable dans une intégrale généralisée. Les intégrations par parties s'effectuent sur un segment.
7. Comparaison série-intégrale
   Pour f continue, positive et décroissante sur $[a, +\infty[$, la série $\sum f(n)$ est de même nature que l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$. Application à l'estimation de sommes.
8. Intégrales classiques
   Intégrale de Gauss (valeur admise). Fonction Γ (domaine de définition, équation fonctionnelle, valeur sur les entiers et en $\frac{1}{2}$).

Diagonalisation

1. Diagonalisation naïve des matrices carrées et applications
   Définition : une matrice carrée est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale. Définition des valeurs et colonnes propres. Méthode de diagonalisation effective : recherche d'une matrice inversible P dont les colonnes sont propres pour A. Méthode pratique de recherche des valeurs propres. Application au calcul des puissances d'une matrice carrée.