ECS2 – Lycée La Bruyère, Versailles
Mathématiques

Programme de colle : semaine 7

du 13 au 17 novembre 2017

Algèbre linéaire (révisions et compléments)

1. Espaces vectoriels
   Notion d'espace vectoriels, exemples. Sous-espaces vectoriels : définition, caractérisation, exemples, sous-espace engendré, somme de plusieurs sous-espaces. Familles libres, familles génératrices, bases. Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie : théorème de la base incomplète, existence de bases, définition de la dimension, dimension des espaces classiques, caractérisation des bases parmi les familles libres, parmi les familles génératrices, dimension d'un sous-espace vectoriel, d'un produit cartésien d'espaces, de la somme de deux sous-espaces. Rang d'une famille de vecteurs : définition, caractérisation de la liberté par le rang.
2. Calcul matriciel (paragraphe à réviser seul par les étudiants)
   Opérations matricielles : structure vectorielle de $\mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, produit, puissances et polynômes de matrices, formule du binôme de Newton, transposée. Matrices par blocs. Algorithme du pivot de Gauss. Trace d'une matrice carrée.
3. Applications linéaires
   Définition, endomorphismes, isomorphismes, automorphismes, noyau et image d'une application linéaire, application à la caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité d'une application linéaire, sous-espace stable et endomorphisme induit. Opérations sur les applications linéaires : structure vectorielle de $\mathbf{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$, composition, itérés et polynômes d'endomorphismes. Caractérisation d'une application linéaire par les images des vecteurs d'une base de l'espace de départ, deux espaces de dimension finie sont isomorphismes si, et seulement si, ils ont même dimension. Rang d'une application linéaire : définition, théorème du rang, application à la caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité et de la bijectivité d'une application linéaire, cas où la source et le but sont de même dimension finie.
4. Représentations matricielles
   Représentation matricielle d'un vecteur dans une base, d'une application linéaire dans des bases, matrice d'une combinaison linéaire d'applications linéaires, d'une composée, d'un isomorphisme, isomorphisme entre $\mathbf{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et $\mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Interprétation géométrique canonique des matrices. Matrices de passage, formules de changement de bases pour les vecteurs, pour les applications linéaires, pour les endomorphismes. Matrices semblables. Rang d'une matrice, caractérisations de l'inversibilité d'une matrice carrée.
5. Sous-espaces supplémentaires, projecteurs et symétries
   Famille finie de sous-espaces en somme directe. Sous-espaces supplémentaires, exemple des sous-espaces de matrices symétriques et antisymétriques, base adaptée à une famille de sous-espaces supplémentaires, existence et dimension d'un supplémentaire. Projecteur sur un sous-espace parallèlement à un supplémentaire, caractérisation des projecteurs parmi les endomorphismes. Symétrie par rapport à un sous-espace parallèlement à un supplémentaire, caractérisation des symétries parmi les endomorphismes. Formes linéaires, hyperplans (en dimension quelconque), caractérisation des hyperplans comme noyaux de formes linéaires non nulles, unicité de l'équation à multiplication près par un scalaire non nul, cas de la dimension finie.

Intégrales généralisées (révisions et compléments)

1. Rappels sur les intégrales définies (à travailler seul par les étudiants)
   Rappel succint de la définition, sommes de Riemann. Relation de Chasles, linéarité, positivité (avec

T.S.V.P.

cas d'égalité), croissance de l'intégrale, inégalité triangulaire intégrale. Primitives, différentes formes du théorème fondamental, intégration par parties, changement de variable.

2. Notion d'intégrale généralisée
   Sur un intervalle semi-ouvert : définition, intégrales faussement généralisées, la nature de l'intégrale ne dépend que du comportement de la fonction au voisinage de la borne de généralisation, reste d'une intégrale généralisée convergente, convergence du reste vers 0, nature et calcul d'une intégrale grâce à une primitive. Exemples de références : intégrales de Riemann, $\int_0^{+\infty} \mathbf{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$. Sur un intervalle ouvert. Sur un intervalle privé d'un nombre fini de points. Théorèmes opératoires.

3. Propriétés des intégrales généralisées convergentes
   Linéarité. Relation de Chasles. Positivité et croissance (avec cas d'égalité).

4. Théorème de comparaison pour les fonctions positives
   Lemme fondamental et théorème de comparaison. Déclinaisons du théorème de comparaison aux cas où $f = o(g)$ ou $f \sim g$ au voisinage d'une borne de généralisation. Comparaison aux intégrales de Riemann.

5. Intégrales absolument convergentes
   Définition, la convergence absolue implique la convergence, inégalité triangulaire intégrale. Notion d'intégrale semi-convergente.

6. Outils de calcul intégral
   Changement de variable dans une intégrale généralisée. Les intégrations par parties s'effectuent sur un segment.

7. Comparaison série-intégrale *(à partir de jeudi)*
   Pour f continue, positive et décroissante sur $[a, +\infty[$, la série $\sum f(n)$ est de même nature que l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$. Application à l'estimation de sommes.

8. Intégrales classiques
   Intégrale de Gauss (valeur admise). Fonction Γ (domaine de définition, équation fonctionnelle, valeur sur les entiers et en $\frac{1}{2}$).