ECS2 – Lycée La Bruyère, Versailles
Mathématiques

Programme de colle : semaine 5

du 16 au 20 octobre 2017

Vecteurs aléatoires discrets

1. Couples de variables aléatoires discrètes
   Couple aléatoire discret, tribu associée. Loi conjointe et lois marginales, la loi conjointe détermine les lois marginales, la réciproque est fausse. Lois conditionnelles. Indépendance de deux variables aléatoires discrètes : la loi conjointe est le produit des lois marginales.
2. Variable aléatoire fonction de deux variables aléatoires discrètes
   Expression de la loi de $Z = g(X, Y)$ en fonction de la loi conjointe du couple (X, Y). Cas particulier de $Z = X + Y$. Somme de deux variables aléatoires indépendantes suivant deux lois binomiales ou deux lois de Poisson. Espérance : théorème de transfert, linéarité, positivité, croissance, espérance du produit de deux variables indépendantes admettant chacune une espérance. Covariance de deux variables aléatoires admettant chacune un moment d'ordre 2, bilinéarité, symétrie, formule de Kœnig-Huygens, développement de $\mathbb{V}(X+Y)$, deux variables aléatoires indépendantes sont non corrélées, la réciproque est fausse. Coefficient de corrélation linéaire $\varrho_{X,Y}$, inégalité $|\varrho_{X,Y}| \leqslant 1$ avec cas d'égalité.
3. Vecteurs aléatoires
   Définition, tribu associée, loi conjointe et lois marginales. Indépendance mutuelle de plusieurs variables aléatoires (cas d'une famille finie ou infinie), lemme des coalitions (admis). Variable aléatoire fonction d'un vecteur discret : loi, théorème de transfert. Espérance d'un produit de variables indépendantes admettant chacune une espérance. Variance d'une somme de variables aléatoires, cas de variables deux-à-deux indépendantes, somme de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes une loi binomiale, une loi de Bernoulli ou une loi de Poisson.

Algèbre linéaire (révisions et compléments)

1. Espaces vectoriels
   Notion d'espace vectoriels, exemples. Sous-espaces vectoriels : définition, caractérisation, exemples, sous-espace engendré, somme de plusieurs sous-espaces. Familles libres, familles génératrices, bases. Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie : théorème de la base incomplète, existence de bases, définition de la dimension, dimension des espaces classiques, caractérisation des bases parmi les familles libres, parmi les familles génératrices, dimension d'un sous-espace vectoriel, d'un produit cartésien d'espaces, de la somme de deux sous-espaces. Rang d'une famille de vecteurs : définition, caractérisation de la liberté par le rang.
2. Calcul matriciel (paragraphe à réviser seul par les étudiants)
   Opérations matricielles : structure vectorielle de $\mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, produit, puissances et polynômes de matrices, formule du binôme de Newton, transposée. Matrices par blocs. Algorithme du pivot de Gauss. Trace d'une matrice carrée.
3. Applications linéaires
   Définition, endomorphismes, isomorphismes, automorphismes, noyau et image d'une application linéaire, application à la caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité d'une application linéaire, sous-espace stable et endomorphisme induit. Opérations sur les applications linéaires : structure vectorielle de $\mathbf{L}(E, F)$, composition, itérés et polynômes d'endomorphismes. Caractérisation d'une application linéaire par les images des vecteurs d'une base de l'espace de départ, deux espaces de dimension finie sont isomorphismes si, et seulement si, ils ont même dimension. Rang d'une

T.S.V.P.

application linéaire : définition, théorème du rang, application à la caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité et de la bijectivité d'une application linéaire, cas où la source et le but sont de même dimension finie.

4. Représentations matricielles *(à partir de jeudi)*
   Représentation matricielle d'un vecteur dans une base, d'une application linéaire dans des bases, matrice d'une combinaison linéaire d'applications linéaires, d'une composée, isomorphisme entre $\mathbf{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et $\mathbf{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Interprétation géométrique canonique des matrices. Formules de changement de bases. Matrices semblables. Rang d'une matrice, caractérisations de l'inversibilité d'une matrice carrée.