

Programme de colle : semaine 4
du 9 au 13 octobre 2017

Probabilités générales et discrètes (révisions et compléments)

1. Principes généraux du calcul des probabilités
Étapes de la rédaction d'un calcul de probabilités. « Règles » de calculs en probabilités : probabilité d'un complémentaire, d'une intersection dénombrable décroissante, d'une intersection finie d'événements mutuellement indépendants, formule des probabilités composées, probabilité d'une union dénombrable disjointe, d'une union dénombrable croissante, d'une union finie d'événements mutuellement indépendants, formule du crible de Poincaré (au programme pour 2 ou 3 événements). Formule des probabilités totales. Calcul de probabilités conditionnelles.
2. Variables aléatoires réelles discrètes
Définition, tribu associée, loi. Espérance, positivité, théorème de transfert (admis), linéarité (admise), croissance, existence par domination. Espérance conditionnelle, formule de l'espérance totale. Variance, $V(aX + b)$, formule de Kœnig-Huygens, écart-type. Variables centrées, réduites.
3. Lois discrètes classiques
Lois de Bernoulli, uniforme, binomiale, géométrique, de Poisson. *La loi hypergéométrique n'est plus au programme.*

Vecteurs aléatoires discrets

1. Couples de variables aléatoires discrètes
Couple aléatoire discret, tribu associée. Loi conjointe et lois marginales, la loi conjointe détermine les lois marginales, la réciproque est fautive. Lois conditionnelles. Indépendance de deux variables aléatoires discrètes : la loi conjointe est le produit des lois marginales.
2. Variable aléatoire fonction de deux variables aléatoires discrètes
Expression de la loi de $Z = g(X, Y)$ en fonction de la loi conjointe du couple (X, Y) . Cas particulier de $Z = X + Y$. Somme de deux variables aléatoires indépendantes suivant deux lois binomiales ou deux lois de Poisson. Espérance : théorème de transfert, linéarité, positivité, croissance, espérance du produit de deux variables indépendantes admettant chacune une espérance. Covariance de deux variables aléatoires admettant chacune un moment d'ordre 2, bilinéarité, symétrie, formule de Kœnig-Huygens, développement de $V(X + Y)$, deux variables aléatoires indépendantes sont non corrélées, la réciproque est fautive. Coefficient de corrélation linéaire $\rho_{X,Y}$, inégalité $|\rho_{X,Y}| \leq 1$ avec cas d'égalité.
3. Vecteurs aléatoires
Définition, tribu associée, loi conjointe et lois marginales. Indépendance mutuelle de plusieurs variables aléatoires (cas d'une famille finie ou infinie), lemme des coalitions (admis). Variable aléatoire fonction d'un vecteur discret : loi, théorème de transfert. Espérance d'un produit de variables indépendantes admettant chacune une espérance. Variance d'une somme de variables aléatoires, cas de variables deux-à-deux indépendantes, somme de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes une loi binomiale, une loi de Bernoulli ou une loi de Poisson.