

Programme de colle : semaine 3
du 2 au 6 octobre 2017

Analyse réelle : séries (révisions et compléments)

1. Définition et premières propriétés

Nature d'une série ; somme d'une série convergente. Le terme général d'une série convergente tend vers 0. Séries grossièrement divergentes. Restes d'une série convergente. Séries géométriques, formule du binôme négatif, série harmonique alternée (à titre d'exemple), séries télescopiques. Théorèmes opératoires. Séries absolument convergentes. Toute série absolument convergente est convergente. Lorsque $\sum u_n$ est absolument convergente,

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|.$$

2. Séries à termes réels positifs

Théorème fondamental et séries de référence (séries géométriques, séries de Riemann). Théorème de comparaison. Comparaison aux séries de référence (« règles » de d'Alembert et de Riemann, hors-programme). Série exponentielle.

3. Séries semi-convergentes

Critère de convergence spécial aux séries alternées (hors-programme).

4. Plan d'étude

5. Questions de commutativité et d'associativité (*les étudiants ne doivent pas être interrogés sur ce paragraphe, qui ne constitue pas un objectif du programme*)

Mise en évidence de l'absence de commutativité et d'associativité pour les sommes de séries. Séries commutativement convergentes, caractérisation par la convergence absolue (admis). Familles sommables sur un ensemble dénombrable. Théorème de sommation par paquets (admis).

6. Séries doubles (*seuls les meilleurs étudiants qui le souhaiteraient seront interrogés sur ce paragraphe, s'ils ont traité correctement un premier exercice plus classique*)

Théorème de Fubini, qui tient lieu de définition pour la notion de convergence absolue d'une série double et pour sa somme. Théorème de comparaison.

Probabilités générales et discrètes (révisions et compléments)

1. Principes généraux du calcul des probabilités

Étapes de la rédaction d'un calcul de probabilités. « Règles » de calculs en probabilités : probabilité d'un complémentaire, d'une intersection dénombrable décroissante, d'une intersection finie d'événements mutuellement indépendants, formule des probabilités composées, probabilité d'une union dénombrable disjointe, d'une union dénombrable croissante, d'une union finie d'événements mutuellement indépendants, formule du crible de Poincaré (au programme pour 2 ou 3 événements). Formule des probabilités totales. Calcul de probabilités conditionnelles.

2. Variables aléatoires réelles discrètes

Définition, tribu associée, loi. Espérance, positivité, théorème de transfert, linéarité (admise pour l'instant), croissance, existence par domination (admis pour l'instant). Espérance conditionnelle, formule de l'espérance totale. Variance, $V(aX + b)$, formule de Koenig-Huygens, écart-type. Variables centrées, réduites.

3. Lois discrètes classiques

Lois de Bernoulli, uniforme, binomiale, géométrique, de Poisson. *La loi hypergéométrique n'est plus au programme.*