

# HEC 2018

## Éléments de correction

### Préliminaire

1. a. Pour  $k \in \mathbb{N}$  donné, la fonction  $t \mapsto t^k e^{-t^2}$  est continue sur  $[0, +\infty[$  avec  $0 \leq t^k e^{-t^2} = (t^2)^{k/2} e^{-t^2} = o(\frac{1}{t^2} \geq 0)$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ , d'où la convergence de  $\int_0^{+\infty} t^k e^{-t^2} dt$  par comparaison à l'intégrale de Riemann convergente  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ .

b. Le calcul donne :

$$A_1 = \int_0^{+\infty} t e^{-t^2} dt = \left[ -\frac{1}{2} e^{-t^2} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}.$$

Par ailleurs, en considérant une variable aléatoire  $Z$  de loi  $\mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$ , de densité  $f_Z : t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}$ , il vient par parité de  $f_Z$  :

$$A_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi} \int_0^{+\infty} f_Z(t) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(t) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

et

$$A_2 = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_Z(t) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \mathbb{E}(Z^2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \mathbb{V}(Z) = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

2. Pour  $x \in \mathbb{R}$  donné, les fonctions  $t \mapsto e^{-t^2} \cos(2xt)$  et  $t \mapsto t e^{-t^2} \sin(2xt)$  sont continue sur  $[0, +\infty[$  avec, pour tout  $t \in [0, +\infty[$ ,

$$|e^{-t^2} \cos(2xt)| \leq e^{-t^2} \quad \text{et} \quad |t e^{-t^2} \sin(2xt)| \leq t e^{-t^2},$$

si bien que les intégrales  $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(2xt) dt$  et  $\int_0^{+\infty} t e^{-t^2} \sin(2xt) dt$  convergent absolument donc convergent par comparaison aux intégrales convergentes de la question 1. pour  $k = 0$  et  $k = 1$ .

### Première partie

3. a. La fonction  $\sin$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  avec, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $|\sin' t| = |\cos t| \leq 1$ . L'inégalité des accroissements finis garantit alors que  $|\sin u| = |\sin u - \sin 0| \leq |u|$  pour tout  $u \in \mathbb{R}$ .

b. Pour  $a, b \in \mathbb{R}$ , l'identification des parties réelles dans la formule  $e^{i(a \pm b)} = e^{ia} e^{\pm ib}$  donne :

$$\begin{cases} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \end{cases}$$

d'où l'on déduit que

$$\cos(a-b) - \cos(a+b) = 2 \sin a \sin b.$$

En appliquant, pour  $u, v \in \mathbb{R}$ , cette formule à  $a$  et  $b$  choisis tels que :

$$\begin{cases} a-b = u \\ a+b = v \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{u+v}{2} \\ b = \frac{v-u}{2} \end{cases}$$

il vient :

$$\cos u - \cos v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{v-u}{2}.$$

c. Pour  $x \in \mathbb{R}$  donné et  $h \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} |F(x+h) - F(x)| &= \left| \int_0^{+\infty} e^{-t^2} [\cos(2(x+h)t) - \cos(2xt)] dt \right| \\ &\leq \int_0^{+\infty} |\cos(2(x+h)t) - \cos(2xt)| e^{-t^2} dt \\ &= 2 \int_0^{+\infty} |\sin((2x+h)t) \sin(ht)| e^{-t^2} dt \leq 2|h| \int_0^{+\infty} t e^{-t^2} dt \end{aligned}$$

d'après a. et b., toutes intégrales convergentes d'après 1.a.. Puisque le majorant tend vers 0 lorsque  $h \rightarrow 0$ , on en déduit par encadrement que  $F(x+h) \rightarrow F(x)$  lorsque  $h \rightarrow 0$ , c'est-à-dire que  $F$  est continue en  $x$ . Le résultat étant établi pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , la fonction  $F$  est donc continue sur  $\mathbb{R}$ .

4. a. En appliquant la formule de Taylor à l'ordre 1 à la fonction  $\sin$ , de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$  avec  $|\sin''(t)| \leq 1 = M$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , il vient pour  $u \in \mathbb{R}$  donné :

$$|\sin u - u| = \left| \sin u - \sum_{k=0}^1 \frac{\sin^{(k)}(0)}{k!} u^k \right| \leq \frac{u^2}{2} M = \frac{u^2}{2}.$$

- b. Pour  $x, h \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) + 2hG(x) &= \int_0^{+\infty} [\cos(2(x+h)t) - \cos(2xt) + 2ht \sin(2xt)] e^{-t^2} dt \\ &= \int_0^{+\infty} [\cos(2xt) \cos(2ht) - \sin(2xt) \sin(2ht) - \cos(2xt) + 2ht \sin(2xt)] e^{-t^2} dt \\ &= \int_0^{+\infty} [(2ht - \sin(2ht)) \sin(2xt) + (\cos(2ht) - 1) \cos(2xt)] e^{-t^2} dt. \end{aligned}$$

- c. Pour  $x, h \in \mathbb{R}$ , il vient d'après 3.a., a. et b. :

$$\begin{aligned} |F(x+h) - F(x) + 2hG(x)| &\leq \int_0^{+\infty} |(2ht - \sin(2ht)) \sin(2xt) - 2 \sin^2(ht) \cos(2xt)| e^{-t^2} dt \\ &\leq \int_0^{+\infty} (|2ht - \sin(2ht)| |\sin(2xt)| + 2 \sin^2(ht) |\cos(2xt)|) e^{-t^2} dt \leq 4h^2 \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt, \end{aligned}$$

toutes intégrales convergentes, d'où le résultat avec  $C = 4A_2 = \sqrt{\pi}$ .

5. a. Pour  $x \in \mathbb{R}$  donné, il ressort de 4.c. que :

$$\forall h \in \mathbb{R}^*, \quad \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} + 2G(x) \right| \leq C |h| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0,$$

d'où l'on déduit par encadrement que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = -2G(x),$$

si bien que  $F$  est dérivable en  $x$ , avec

$$F'(x) = -2G(x) = -2 \int_0^{+\infty} t e^{-t^2} \sin(2xt) dt.$$

- b. Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on obtient par intégration par parties (en dérivant  $t \mapsto \sin(2xt)$  et en primitivant  $t \mapsto -2te^{-t^2}$ ), d'après a. :

$$F'(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left( [e^{-t^2} \sin(2xt)]_{t=0}^{t=y} - 2x \int_0^y e^{-t^2} \cos(2xt) dt \right) = -2xF(x).$$

- c. Il ressort de la question b. que la fonction  $g : x \mapsto F(x)e^{x^2}$  admet une dérivée nulle sur  $\mathbb{R}$  :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = (F'(x) + 2xF(x))e^{x^2} = 0.$$

Elle est donc constante sur cet intervalle : il existe  $k \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $F(x)e^{x^2} = k$ . En évaluant en  $x = 0$ , on obtient la valeur de  $k = F(0) = A_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  d'après 1.b., si bien que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2}.$$

## Deuxième partie

6. a. La fonction  $\varphi_n$  est continue sur  $\mathcal{D}$  par opérations sur les fonctions continues. Par ailleurs,

$$\varphi_n(u) = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})u)}{2 \sin \frac{u}{2}} \sim \frac{(n + \frac{1}{2})u}{u} \rightarrow n + \frac{1}{2}, \quad u \rightarrow 0$$

et la fonction  $\varphi_n$  est donc prolongeable par continuité en 0.

- b. La fonction  $\varphi_n$  étant manifestement  $2\pi$ -périodique, on déduit du résultat obtenu en a. qu'elle admet un prolongement continu sur  $\mathbb{R}$ .

- c. La parité de  $\varphi_n$  est immédiate à partir de l'imparité de  $\sin$ .

www.rblld.fr

7. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  (les formules proposées ci-dessous ne sont pas valables pour  $n = 0$ , cas sans intérêt pour la suite).

a. Il vient classiquement, lorsque  $e^{iu} \neq 1$  i.e. lorsque  $u \in \mathcal{D}$  :

$$\sum_{k=1}^n e^{iku} = e^{iu} \frac{1 - e^{inu}}{1 - e^{iu}} = e^{iu} \frac{e^{inu/2} e^{-inu/2} - e^{inu/2}}{e^{iu/2} e^{-iu/2} - e^{iu/2}} = e^{i(n+1)u/2} \frac{\sin \frac{nu}{2}}{\sin \frac{u}{2}}.$$

Lorsque  $u \notin \mathcal{D}$ , on a bien sûr  $\sum_{k=1}^n e^{iku} = n$ .

b. La relation est immédiate lorsque  $u \notin \mathcal{D}$  d'après 6.. Pour  $u \in \mathcal{D}$ , la question a. donne :

$$\sum_{k=1}^n \cos ku = \Re \left( \sum_{k=1}^n e^{iku} \right) = \frac{\cos \frac{(n+1)u}{2} \sin \frac{nu}{2}}{\sin \frac{u}{2}}$$

c'est-à-dire, d'après la formule de trigonométrie  $\cos a \sin b = \frac{1}{2}(\sin(a + b) - \sin(a - b))$ ,

$$\sum_{k=1}^n \cos ku = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})u) - \sin \frac{u}{2}}{2 \sin \frac{u}{2}} = \varphi_n(u) - \frac{1}{2}.$$

c. D'après b.,

$$\int_0^{2\pi} \varphi_n(u) du = \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos ku \right) du = \pi + \sum_{k=1}^n \int_0^{2\pi} \cos ku du = \pi.$$

8. Une première méthode peut consister à observer que la fonction  $x \mapsto \int_x^{x+T} \psi(u) du$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , de dérivée  $x \mapsto \psi(x + T) - \psi(x) = 0$ . Elle est donc constante sur l'intervalle  $\mathbb{R}$ , c'est-à-dire égale à sa valeur en 0 :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_x^{x+T} \psi(u) du = \int_0^T \psi(u) du.$$

On peut également utiliser la relation de Chasles puis le changement de variable affine  $u = v + T$  dans la dernière intégrale : pour  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \int_x^{x+T} \psi(u) du &= \int_x^0 \psi(u) du + \int_0^T \psi(u) du + \int_T^{x+T} \psi(u) du \\ &= \int_x^0 \psi(u) du + \int_0^T \psi(u) du + \int_0^x \psi(v + T) dv = \int_0^T \psi(u) du. \end{aligned}$$

### Troisième partie

9. a. Pour  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$k^2 f(x + 2k\pi) = \exp(2 \ln |k| - \theta(x + 2k\pi)^2) = \exp(-4\theta\pi^2 k^2 + o(k^2)) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \pm\infty,$$

si bien que  $f(x \pm 2k\pi) = o(\frac{1}{k^2})$  lorsque  $k \rightarrow +\infty$ , ce qui garantit la convergence des séries  $\sum_{k \geq 1} f(x \pm 2k\pi)$  par comparaison à la série de Riemann convergente  $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$ .

Remarque. Puisque la convergence est absolue, on peut noter

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad H(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x + 2k\pi)$$

et il apparaît immédiatement sur cette expression que H est  $2\pi$ -périodique :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad H(x + 2\pi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x + 2(k + 1)\pi) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} f(x + 2j\pi) = H(x)$$

par décalage d'indice  $j = k + 1$ .

b. D'après la parité évidente de la fonction  $f$ , on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad H(-x) &= f(-x) + \sum_{k=1}^{\infty} f(-x + 2k\pi) + \sum_{k=1}^{\infty} f(-x - 2k\pi) \\ &= f(x) + \sum_{k=1}^{\infty} f(x - 2k\pi) + \sum_{k=1}^{\infty} f(x + 2k\pi) = H(x). \end{aligned}$$

En dérivant la relation ci-dessus, on obtient  $-H'(-x) = H'(x)$ . Ainsi la fonction H est-elle paire et sa dérivée H' impaire.

**10. a.** Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ . Par changement de variable affine puis relation de Chasles,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} H_N(x) \cos(nx) \, dx &= \sum_{k=-N}^N \int_0^{2\pi} f(x + 2k\pi) \cos(nx) \, dx = \sum_{k=-N}^N \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} f(u) \cos(nu - 2kn\pi) \, du \\ &= \sum_{k=-N}^N \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} f(u) \cos(nu) \, du = \int_{-2N\pi}^{2(N+1)\pi} f(u) \cos(nu) \, du. \end{aligned}$$

**b.** On établit comme en **1.a.** et **2.** la convergence de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(u) \cos(nu) \, du$ , si bien d'après **a.** et vu la parité de  $f$  que :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} H_N(x) \cos(nx) \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos(nu) \, du = 2 \int_0^{+\infty} f(u) \cos(nu) \, du.$$

**c.** L'inégalité énoncée est fautive à plus d'un titre : déjà<sup>1</sup> pour  $x = 2\pi$  et  $N = 0$  (adapter l'argument pour  $N = 1$  ou même  $N \geq 1$  quelconque si l'on veut se trouver précisément dans les conditions de l'énoncé), mais il existe un argument plus profond<sup>2</sup> expliquant l'impossibilité d'avoir une telle majoration (indépendante de  $x$ ) valable pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

Il suffit pour la suite d'établir un résultat plus faible :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [0, 2\pi], \quad |H(x) - H_N(x)| \leq 2 \sum_{k=N}^{\infty} e^{-\theta(2k\pi)^2}.$$

En effet, étant donnés  $N \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in [0, 2\pi]$ , on a  $x + 2k\pi \geq 2k\pi \geq 0$  et  $x - 2k\pi \leq -2(k-1)\pi \leq 0$  pour tout  $k \geq N + 1$  si bien, d'après les variations de la fonction carré, que :

$$\begin{aligned} |H(x) - H_N(x)| &= \sum_{k=N+1}^{\infty} e^{-\theta(x+2k\pi)^2} + \sum_{k=N+1}^{\infty} e^{-\theta(x-2k\pi)^2} \\ &\leq \sum_{k=N+1}^{\infty} e^{-\theta(2k\pi)^2} + \sum_{k=N+1}^{\infty} e^{-\theta(2(k-1)\pi)^2} \leq 2 \sum_{k=N+1}^{\infty} e^{-\theta(2k\pi)^2}. \end{aligned}$$

**d.** Pour  $N \in \mathbb{N}^*$ , on a d'après **c.** corrigé :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{2\pi} H(x) \cos(nx) \, dx - \int_0^{2\pi} H_N(x) \cos(nx) \, dx \right| &= \left| \int_0^{2\pi} (H(x) - H_N(x)) \cos(nx) \, dx \right| \\ &\leq \int_0^{2\pi} |H(x) - H_N(x)| |\cos(nx)| \, dx \leq 2 \sum_{k=N}^{\infty} e^{-\theta(2k\pi)^2} \int_0^{2\pi} |\cos(nx)| \, dx. \end{aligned}$$

Puisque le membre de droite tend vers 0 lorsque  $N \rightarrow \infty$  comme reste d'une série convergente d'après **9.a.**, il en ressort par encadrement que :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} H_N(x) \cos(nx) \, dx = \int_0^{2\pi} H(x) \cos(nx) \, dx.$$

Par unicité de la limite, changement de variable affine  $t = \sqrt{\theta}u$  et d'après **5.c.** et **b.**, on a alors finalement :

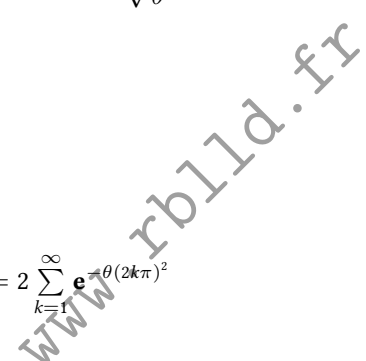
$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} H(x) \cos(nx) \, dx &= 2 \int_0^{+\infty} e^{-\theta u^2} \cos(nu) \, du = \frac{2}{\sqrt{\theta}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos\left(\frac{n}{\sqrt{\theta}}t\right) \, dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{\theta}} F\left(\frac{n}{2\sqrt{\theta}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{\theta}} \exp\left(-\frac{n^2}{4\theta}\right). \end{aligned}$$

1. En effet,

$$|H(2\pi) - H_0(2\pi)| = \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} f(2\pi + 2k\pi) = \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}} f(2k\pi) > \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} f(2k\pi) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\theta(2k\pi)^2}$$

car  $f(0) = 1 > e^{-\theta(2\pi)^2} = f(2\pi)$ .

2. Hors-programme : la série ne converge pas uniformément sur  $\mathbb{R}$ , ni même son terme général vers 0...



11. a. Pour  $N \in \mathbb{N}^*$ , il vient d'après 7.b. :

$$\begin{aligned} a_0 + 2 \sum_{n=1}^N a_n \cos(nx) &= \int_0^{2\pi} H(u) \left( 1 + 2 \sum_{n=1}^N \cos(nu) \cos(nx) \right) du \\ &= \int_0^{2\pi} H(u) \left( 1 + \sum_{n=1}^N [\cos(n(u+x)) + \cos(n(u-x))] \right) du \\ &= \int_0^{2\pi} H(u) (\varphi_N(u+x) + \varphi_N(u-x)) du, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

b. On a d'après les questions a. et 8., compte-tenu de la  $2\pi$ -périodicité de  $H$  et  $\varphi_N$  :

$$\begin{aligned} a_0 + 2 \sum_{n=1}^N a_n \cos(nx) &= \int_x^{x+2\pi} H(v-x) \varphi_N(v) dv + \int_{-x}^{-x+2\pi} H(v+x) \varphi_N(v) dv \\ &= \int_0^{2\pi} H(v-x) \varphi_N(v) dv + \int_0^{2\pi} H(v+x) \varphi_N(v) dv \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{H(v+x) + H(v-x)}{2 \sin \frac{v}{2}} \sin \left( \left( N + \frac{1}{2} \right) v \right) dv. \end{aligned}$$

c. La continuité (admise) de  $H$  sur  $\mathbb{R}$  entraîne celle de  $K_x$  sur  $]0, 2\pi[$ . La dérivabilité (elle aussi admise) de  $H$  en  $x$  garantit par ailleurs que :

$$H(x+v) = H(x) + H'(x)v + o(v), \quad v \rightarrow 0$$

et, par parité de  $H$ ,

$$H(v-x) = H(x-v) = H(x) - H'(x)v + o(v), \quad v \rightarrow 0$$

d'où l'on tire

$$K_x(v) = \frac{H(v+x) + H(v-x) - 2H(x)}{2 \sin \frac{v}{2}} = \frac{o(v)}{v + o(v)} = \frac{o(1)}{1 + o(1)} \rightarrow 0, \quad v \rightarrow 0$$

si bien que  $K_x$  est continue en 0. Enfin, en remarquant que :

$$\begin{aligned} \forall v \in ]0, 2\pi[, \quad K_x(2\pi - v) &= \frac{H(2\pi - v + x) + H(2\pi - v - x) - 2H(x)}{2 \sin(\pi - \frac{v}{2})} \\ &= \frac{H(v-x) + H(v+x) - 2H(x)}{2 \sin \frac{v}{2}} = K_x(v) \end{aligned}$$

par parité et  $2\pi$ -périodicité de  $H$ , on en déduit que  $K_x$  est également continue en  $2\pi$ .

d. En s'appuyant sur les questions 7.c. et b., on obtient pour  $N \in \mathbb{N}^*$  :

$$\begin{aligned} a_0 + 2 \sum_{n=1}^N a_n \cos(nx) - 2\pi H(x) &= \int_0^{2\pi} (H(v+x) + H(v-x)) \varphi_N(v) dv - 2H(x) \int_0^{2\pi} \varphi_N(v) dv \\ &= \int_0^{2\pi} (H(v+x) + H(v-x) - 2H(x)) \varphi_N(v) dv = \int_0^{2\pi} K_x(v) \sin \left( \left( N + \frac{1}{2} \right) v \right) dv. \end{aligned}$$

12. a. Pour  $\lambda > 0$ , il vient par intégration par parties :

$$\int_0^1 g(t) \sin(\lambda t) dt = \left[ \frac{-1}{\lambda} g(t) \cos(\lambda t) \right]_0^1 + \frac{1}{\lambda} \int_0^1 g'(t) \cos(\lambda t) dt$$

de sorte que :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 g(t) \sin(\lambda t) dt \right| &\leq \frac{1}{\lambda} |g(0) - g(1) \cos \lambda| + \frac{1}{\lambda} \left| \int_0^1 g'(t) \cos(\lambda t) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{\lambda} \left( |g(0)| + |g(1)| + \int_0^1 |g'(t)| dt \right) \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

et, par encadrement,

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^1 g(t) \sin(\lambda t) dt = 0.$$

- b.** En appliquant le résultat de la question **a.** à la fonction  $K_x$ , continue sur  $[0, 2\pi]$  d'après **11.c.**, on obtient d'après **11.d.** :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( a_0 + 2 \sum_{n=1}^N a_n \cos(nx) \right) = 2\pi H(x).$$

Or, en utilisant l'expression des coefficients  $a_n$  établie en **10.d.**, on a :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad a_0 + 2 \sum_{n=1}^N a_n \cos(nx) = \sqrt{\frac{\pi}{\theta}} \left( 1 + 2 \sum_{n=1}^N \exp\left(-\frac{n^2}{4\theta}\right) \cos(nx) \right),$$

d'où l'on déduit le résultat :

$$\frac{1}{\sqrt{\pi\theta}} \left( \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{n^2}{4\theta}\right) \cos(nx) \right) = H(x) = e^{-\theta x^2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\theta(x+2k\pi)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\theta(x-2k\pi)^2}.$$

## Quatrième partie

- 13. a.** On peut compléter le code comme indiqué (cf. questions **b.** et **c.** pour l'interprétation des variables) :

---

### Listing 1 : simulation du jeu

---

```

1 fonction v=jeu(p)
2     i=1; v=1; s=1; j=1;
3     while (rand()>p) // le lancer renvoie face
4         i=i+1; j=j+1; // on prépare le lancer suivant
5         if (j>s) then v=-v; s=s+2; j=1; end // changement de main
6     end
7     if (v==1) then disp('A vainqueur'); else disp('B vainqueur'); end
8 endfunction

```

---

*Remarque.* Curieuse fonction qui, en plus de renvoyer le résultat, l'affiche... On va s'en mordre les doigts en **e.**!

- b.** Après l'exécution de la fonction `jeu`, la variable `i` ne représente... rien : c'est une variable locale ! Trève de mauvais esprit : il s'agit du nombre de lancers effectués au cours du jeu. Au cours de l'exécution de la fonction, la variable `i` représente le rang du lancer à venir. Quant à la variable `j`, elle représente le rang du prochain lancer depuis le dernier changement de main. De son côté, la variable `s` représente le nombre maximal de lancers entre le dernier changement de main et le suivant.
- c.** À chaque étape de l'exécution de la fonction `jeu`, la variable `v` désigne le joueur qui se prépare à lancer la pièce : elle vaut 1 lorsqu'il s'agit de A et -1 lorsqu'il s'agit de B.
- d.** Il suffit d'utiliser une variable `k` que l'on initialise par `k=1` ; en ligne 2 et que l'on incrémente entre les lignes 5 et 6 par l'instruction

```
if (v==1) then k=k+1; end
```

- e.** En s'appuyant sur la méthode de Monte-Carlo d'approximation d'une probabilité, on peut proposer le script suivant.

---

### Listing 2 : approximation de la probabilité de victoire de A

---

```

fonction y=approx_PVA(p)
    N=10^4; // nombre d'expériences dans la MMC
    y=0;
    for n=1:N
        if (jeu(p)==1) then y=y+1; end
    end
    y=y/N;
endfunction

```

---

*Remarque.* Le nombre `N` peut être ajusté en fonction de la précision dans l'approximation de la probabilité et du niveau de confiance  $1 - \alpha$  souhaités.

Dans toute la suite, on notera  $\mathbb{P}$  plutôt que  $\mathbb{P}_p$  pour ne pas alourdir inutilement les notations.

14. a. Classiquement, on finit presque sûrement par obtenir un pile au cours des lancers successifs, ce qui signifie que  $\mathbb{P}(H \cup K) = 1$ .

Le fait que la suite de lancers soit tronquée complique légèrement la situation. En notant, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $F_n$  l'événement « on effectue au moins  $n$  lancers et le  $n$ -ième lancer renvoie face », on a par limite monotone :

$$\mathbb{P}(\overline{H \cup K}) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \geq 1} F_n\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^N F_n\right)$$

où, pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$ , la formule des probabilités composées<sup>3</sup> donne :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^N F_n\right) = \mathbb{P}(F_1) \mathbb{P}_{F_1}(F_2) \mathbb{P}_{F_1 \cap F_2}(F_3) \cdots \mathbb{P}_{F_1 \cap \dots \cap F_{N-1}}(F_N) = p^N.$$

Il en ressort, sachant  $0 < p < 1$ , que  $\mathbb{P}(H \cup K) = 1$ .

La variable  $X + Y$  donne alors le temps d'attente du premier succès (apparition de pile) lors d'une suite (tronquée après le premier succès) d'expériences de Bernoulli indépendantes et de même paramètre  $p$ . Classiquement (adapter le raisonnement standard comme ci-dessus), elle suit donc la loi géométrique  $\mathcal{G}(p)$ .

- b. De l'inclusion évidente  $[X = 1] \subset H$ , on déduit que  $p \leq \mathbb{P}(H) \leq 1$ , si bien que  $\mathbb{P}(H)$  converge vers 1 lorsque  $p \rightarrow 1$  par encadrement.
15. a. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $c_n$  le rang du premier lancer après le  $n$ -ième changement de main dans l'éventualité improbable où le côté face sortirait à chaque lancer, en convenant que  $c_0 = 1$ . La  $n$ -ième série de lancers (i.e. celle délimitée par les  $n - 1$ -ième et  $n$ -ième changements de main) est alors constituée des  $2n - 1$  lancers correspondant aux rangs  $c_{n-1}$  à  $c_n - 1$  si bien que  $c_n = c_{n-1} + 2n - 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . On démontre alors par une récurrence aisée que  $c_n = n^2 + 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . De retour au cas général, le joueur A n'est susceptible de gagner qu'après un nombre pair de changements de main, de sorte que l'ensemble I des rangs de victoire possible du joueur A est donné par :

$$I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \llbracket c_{2n}, c_{2n+1} - 1 \rrbracket = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \llbracket 4n^2 + 1, 4n^2 + 4n + 1 \rrbracket.$$

- b. D'après a., sachant que le rang de victoire du gagnant est donné par  $X + Y$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(H) &= \mathbb{P}(X + Y \in I) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [X + Y \in \llbracket 4n^2 + 1, 4n^2 + 4n + 1 \rrbracket]\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X + Y \in \llbracket 4n^2 + 1, 4n^2 + 4n + 1 \rrbracket) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbb{P}(X + Y \leq 4n^2 + 4n + 1) - \mathbb{P}(X + Y < 4n^2 + 1)) \end{aligned}$$

car l'union est disjointe. En notant

$$F_p : n \in \mathbb{N}^* \longmapsto \mathbb{P}(T \leq n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(T = k) = \sum_{k=1}^n (1 - p)^{k-1} p = 1 - (1 - p)^n$$

la (restriction à  $\mathbb{N}^*$ ) de la fonction de répartition d'une variable  $T$  de loi géométrique de paramètre  $p$ , on a donc :

$$\mathbb{P}(H) = \sum_{n=0}^{\infty} (F_p(4n^2 + 4n + 1) - F_p(4n^2)) = \sum_{n=0}^{\infty} ((1 - p)^{4n^2} - (1 - p)^{4n^2 + 4n + 1}).$$

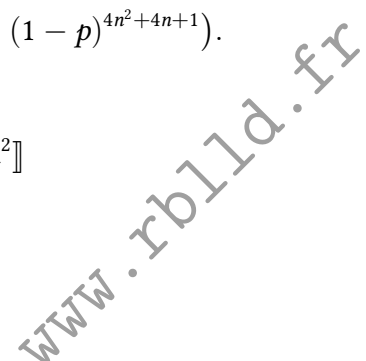
On monterait de même que :

$$J = \bigcup_{n \geq 1} \llbracket c_{2n-1}, c_{2n} - 1 \rrbracket = \bigcup_{n \geq 1} \llbracket 4n^2 - 4n + 2, 4n^2 \rrbracket$$

puis

$$\mathbb{P}(K) = \sum_{n=1}^{\infty} ((1 - p)^{4n^2 - 4n + 1} - (1 - p)^{4n^2}).$$

3. Les événements  $F_n, n \in \mathbb{N}^*$ , ne sont pas indépendants (la suite  $(F_n)$  est décroissante).



16. a. En appliquant la formule de la question 12.b. avec  $x = \pi$  et  $\theta = -\frac{1}{4\ln(1-p)} > 0$ , on obtient :

$$\frac{1}{\sqrt{\pi\theta}} \left( \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1-p)^{n^2} \right) = H(x) \geq e^{-\theta x^2} > 0,$$

si bien que

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (1-p)^{n^2} > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

b. D'après les questions 15.b. et a., et compte-tenu de la convergence des deux séries au membre central ci-dessous (par comparaison à une série de Riemann ou une série géométrique),

$$\mathbb{P}(H) = \sum_{n=0}^{\infty} (1-p)^{(2n)^2} - \sum_{n=0}^{\infty} (1-p)^{(2n+1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (1-p)^{n^2} > \frac{1}{2}.$$

Le jeu est donc à l'avantage du joueur A, dont la probabilité de victoire est strictement supérieure à celle de B.

