

HEC 2018

Éléments de correction

Préliminaire

1. a. Pour $k \in \mathbb{N}$ donné, la fonction $t \mapsto t^k e^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ avec $0 \leq t^k e^{-t^2} = (t^2)^{k/2} e^{-t^2} = o(\frac{1}{t^2} \geq 0)$ lorsque $t \rightarrow +\infty$, d'où la convergence de $\int_0^{+\infty} t^k e^{-t^2} dt$ par comparaison à l'intégrale de Riemann convergente $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$.

b. Le calcul donne :

$$A_1 = \int_0^{+\infty} t e^{-t^2} dt = \left[-\frac{1}{2} e^{-t^2} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}.$$

Par ailleurs, en considérant une variable aléatoire Z de loi $\mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$, de densité $f_Z : t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}$, il vient par parité de f_Z :

$$A_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi} \int_0^{+\infty} f_Z(t) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(t) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

et

$$A_2 = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_Z(t) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \mathbb{E}(Z^2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \mathbb{V}(Z) = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

2. Pour $x \in \mathbb{R}$ donné, les fonctions $t \mapsto e^{-t^2} \cos(2xt)$ et $t \mapsto t e^{-t^2} \sin(2xt)$ sont continue sur $[0, +\infty[$ avec, pour tout $t \in [0, +\infty[$,

$$|e^{-t^2} \cos(2xt)| \leq e^{-t^2} \quad \text{et} \quad |t e^{-t^2} \sin(2xt)| \leq t e^{-t^2},$$

si bien que les intégrales $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(2xt) dt$ et $\int_0^{+\infty} t e^{-t^2} \sin(2xt) dt$ convergent absolument donc convergent par comparaison aux intégrales convergentes de la question 1. pour $k = 0$ et $k = 1$.

Première partie

3. a. La fonction \sin est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} avec, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\sin' t| = |\cos t| \leq 1$. L'inégalité des accroissements finis garantit alors que $|\sin u| = |\sin u - \sin 0| \leq |u|$ pour tout $u \in \mathbb{R}$.

b. Pour $a, b \in \mathbb{R}$, l'identification des parties réelles dans la formule $e^{i(a \pm b)} = e^{ia} e^{\pm ib}$ donne :

$$\begin{cases} \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \end{cases}$$

d'où l'on déduit que

$$\cos(a - b) - \cos(a + b) = 2 \sin a \sin b.$$

En appliquant, pour $u, v \in \mathbb{R}$, cette formule à a et b choisis tels que :

$$\begin{cases} a - b = u \\ a + b = v \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{u+v}{2} \\ b = \frac{v-u}{2} \end{cases}$$

il vient :

$$\cos u - \cos v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{v-u}{2}.$$

c. Pour $x \in \mathbb{R}$ donné et $h \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |F(x+h) - F(x)| &= \left| \int_0^{+\infty} e^{-t^2} [\cos(2(x+h)t) - \cos(2xt)] dt \right| \\ &\leq \int_0^{+\infty} |\cos(2(x+h)t) - \cos(2xt)| e^{-t^2} dt \\ &= 2 \int_0^{+\infty} |\sin((2x+h)t) \sin(ht)| e^{-t^2} dt \leq 2|h| \int_0^{+\infty} t e^{-t^2} dt \end{aligned}$$

d'après a. et b., toutes intégrales convergentes d'après 1.a.. Puisque le majorant tend vers 0 lorsque $h \rightarrow 0$, on en déduit par encadrement que $F(x+h) \rightarrow F(x)$ lorsque $h \rightarrow 0$, c'est-à-dire que F est continue en x . Le résultat étant établi pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction F est donc continue sur \mathbb{R} .

4. a. En appliquant la formule de Taylor à l'ordre 1 à la fonction \sin , de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} avec $|\sin''(t)| \leq 1 = M$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, il vient pour $u \in \mathbb{R}$ donné :

$$|\sin u - u| = \left| \sin u - \sum_{k=0}^1 \frac{\sin^{(k)}(0)}{k!} u^k \right| \leq \frac{u^2}{2} M = \frac{u^2}{2}.$$

- b. Pour $x, h \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) + 2hG(x) &= \int_0^{+\infty} [\cos(2(x+h)t) - \cos(2xt) + 2ht \sin(2xt)] e^{-t^2} dt \\ &= \int_0^{+\infty} [\cos(2xt) \cos(2ht) - \sin(2xt) \sin(2ht) - \cos(2xt) + 2ht \sin(2xt)] e^{-t^2} dt \\ &= \int_0^{+\infty} [(2ht - \sin(2ht)) \sin(2xt) + (\cos(2ht) - 1) \cos(2xt)] e^{-t^2} dt. \end{aligned}$$

- c. Pour $x, h \in \mathbb{R}$, il vient d'après 3.a., a. et b. :

$$\begin{aligned} |F(x+h) - F(x) + 2hG(x)| &\leq \int_0^{+\infty} |(2ht - \sin(2ht)) \sin(2xt) - 2 \sin^2(ht) \cos(2xt)| e^{-t^2} dt \\ &\leq \int_0^{+\infty} (|2ht - \sin(2ht)| |\sin(2xt)| + 2 \sin^2(ht) |\cos(2xt)|) e^{-t^2} dt \leq 4h^2 \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt, \end{aligned}$$

toutes intégrales convergentes, d'où le résultat avec $C = 4A_2 = \sqrt{\pi}$.

5. a. Pour $x \in \mathbb{R}$ donné, il ressort de 4.c. que :

$$\forall h \in \mathbb{R}^*, \quad \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} + 2G(x) \right| \leq C |h| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0,$$

d'où l'on déduit par encadrement que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = -2G(x),$$

si bien que F est dérivable en x , avec

$$F'(x) = -2G(x) = -2 \int_0^{+\infty} t e^{-t^2} \sin(2xt) dt.$$

- b. Pour $x \in \mathbb{R}$, on obtient par intégration par parties (en dérivant $t \mapsto \sin(2xt)$ et en primitivant $t \mapsto -2te^{-t^2}$), d'après a. :

$$F'(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left([e^{-t^2} \sin(2xt)]_{t=0}^{t=y} - 2x \int_0^y e^{-t^2} \cos(2xt) dt \right) = -2xF(x).$$

- c. Il ressort de la question b. que la fonction $g : x \mapsto F(x)e^{x^2}$ admet une dérivée nulle sur \mathbb{R} :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = (F'(x) + 2xF(x))e^{x^2} = 0.$$

Elle est donc constante sur cet intervalle : il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x)e^{x^2} = k$. En évaluant en $x = 0$, on obtient la valeur de $k = F(0) = A_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ d'après 1.b., si bien que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2}.$$

Deuxième partie

6. a. La fonction φ_n est continue sur \mathcal{D} par opérations sur les fonctions continues. Par ailleurs,

$$\varphi_n(u) = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})u)}{2 \sin \frac{u}{2}} \sim \frac{(n + \frac{1}{2})u}{u} \rightarrow n + \frac{1}{2}, \quad u \rightarrow 0$$

et la fonction φ_n est donc prolongeable par continuité en 0.

- b. La fonction φ_n étant manifestement 2π -périodique, on déduit du résultat obtenu en a. qu'elle admet un prolongement continu sur \mathbb{R} .

- c. La parité de φ_n est immédiate à partir de l'imparité de \sin .

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ (les formules proposées ci-dessous ne sont pas valables pour $n = 0$, cas sans intérêt pour la suite).

a. Il vient classiquement, lorsque $e^{iu} \neq 1$ i.e. lorsque $u \in \mathcal{D}$:

$$\sum_{k=1}^n e^{iku} = e^{iu} \frac{1 - e^{inu}}{1 - e^{iu}} = e^{iu} \frac{e^{inu/2} e^{-inu/2} - e^{inu/2}}{e^{iu/2} e^{-iu/2} - e^{iu/2}} = e^{i(n+1)u/2} \frac{\sin \frac{nu}{2}}{\sin \frac{u}{2}}.$$

Lorsque $u \notin \mathcal{D}$, on a bien sûr $\sum_{k=1}^n e^{iku} = n$.

b. La relation est immédiate lorsque $u \notin \mathcal{D}$ d'après 6.. Pour $u \in \mathcal{D}$, la question a. donne :

$$\sum_{k=1}^n \cos ku = \Re \left(\sum_{k=1}^n e^{iku} \right) = \frac{\cos \frac{(n+1)u}{2} \sin \frac{nu}{2}}{\sin \frac{u}{2}}$$

c'est-à-dire, d'après la formule de trigonométrie $\cos a \sin b = \frac{1}{2}(\sin(a + b) - \sin(a - b))$,

$$\sum_{k=1}^n \cos ku = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})u) - \sin \frac{u}{2}}{2 \sin \frac{u}{2}} = \varphi_n(u) - \frac{1}{2}.$$

c. D'après b.,

$$\int_0^{2\pi} \varphi_n(u) du = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos ku \right) du = \pi + \sum_{k=1}^n \int_0^{2\pi} \cos ku du = \pi.$$

8. Une première méthode peut consister à observer que la fonction $x \mapsto \int_x^{x+T} \psi(u) du$ est dérivable sur \mathbb{R} , de dérivée $x \mapsto \psi(x + T) - \psi(x) = 0$. Elle est donc constante sur l'intervalle \mathbb{R} , c'est-à-dire égale à sa valeur en 0 :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_x^{x+T} \psi(u) du = \int_0^T \psi(u) du.$$

On peut également utiliser la relation de Chasles puis le changement de variable affine $u = v + T$ dans la dernière intégrale : pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \int_x^{x+T} \psi(u) du &= \int_x^0 \psi(u) du + \int_0^T \psi(u) du + \int_T^{x+T} \psi(u) du \\ &= \int_x^0 \psi(u) du + \int_0^T \psi(u) du + \int_0^x \psi(v + T) dv = \int_0^T \psi(u) du. \end{aligned}$$

Troisième partie

9. a. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$k^2 f(x + 2k\pi) = \exp(2 \ln |k| - \theta(x + 2k\pi)^2) = \exp(-4\theta\pi^2 k^2 + o(k^2)) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \pm\infty,$$

si bien que $f(x \pm 2k\pi) = o(\frac{1}{k^2})$ lorsque $k \rightarrow +\infty$, ce qui garantit la convergence des séries $\sum_{k \geq 1} f(x \pm 2k\pi)$ par comparaison à la série de Riemann convergente $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$.

Remarque. Puisque la convergence est absolue, on peut noter

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad H(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x + 2k\pi)$$

et il apparaît immédiatement sur cette expression que H est 2π -périodique :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad H(x + 2\pi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x + 2(k + 1)\pi) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} f(x + 2j\pi) = H(x)$$

par décalage d'indice $j = k + 1$.

b. D'après la parité évidente de la fonction f , on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad H(-x) &= f(-x) + \sum_{k=1}^{\infty} f(-x + 2k\pi) + \sum_{k=1}^{\infty} f(-x - 2k\pi) \\ &= f(x) + \sum_{k=1}^{\infty} f(x - 2k\pi) + \sum_{k=1}^{\infty} f(x + 2k\pi) = H(x). \end{aligned}$$

En dérivant la relation ci-dessus, on obtient $-H'(-x) = H'(x)$. Ainsi la fonction H est-elle paire et sa dérivée H' impaire.

10. a. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Par changement de variable affine puis relation de Chasles,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} H_N(x) \cos(nx) \, dx &= \sum_{k=-N}^N \int_0^{2\pi} f(x + 2k\pi) \cos(nx) \, dx = \sum_{k=-N}^N \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} f(u) \cos(nu - 2kn\pi) \, du \\ &= \sum_{k=-N}^N \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} f(u) \cos(nu) \, du = \int_{-2N\pi}^{2(N+1)\pi} f(u) \cos(nu) \, du. \end{aligned}$$

b. On établit comme en **1.a.** et **2.** la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(u) \cos(nu) \, du$, si bien d'après **a.** et vu la parité de f que :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} H_N(x) \cos(nx) \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos(nu) \, du = 2 \int_0^{+\infty} f(u) \cos(nu) \, du.$$

c. L'inégalité énoncée est fautive à plus d'un titre : déjà¹ pour $x = 2\pi$ et $N = 0$ (adapter l'argument pour $N = 1$ ou même $N \geq 1$ quelconque si l'on veut se trouver précisément dans les conditions de l'énoncé), mais il existe un argument plus profond² expliquant l'impossibilité d'avoir une telle majoration (indépendante de x) valable pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Il suffit pour la suite d'établir un résultat plus faible :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [0, 2\pi], \quad |H(x) - H_N(x)| \leq 2 \sum_{k=N}^{\infty} e^{-\theta(2k\pi)^2}.$$

En effet, étant donné $N \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 2\pi]$, on a $x + 2k\pi \geq 2k\pi \geq 0$ et $x - 2k\pi \leq -2(k-1)\pi \leq 0$ pour tout $k \geq N + 1$ si bien, d'après les variations de la fonction carré, que :

$$\begin{aligned} |H(x) - H_N(x)| &= \sum_{k=N+1}^{\infty} e^{-\theta(x+2k\pi)^2} + \sum_{k=N+1}^{\infty} e^{-\theta(x-2k\pi)^2} \\ &\leq \sum_{k=N+1}^{\infty} e^{-\theta(2k\pi)^2} + \sum_{k=N+1}^{\infty} e^{-\theta(2(k-1)\pi)^2} \leq 2 \sum_{k=N}^{\infty} e^{-\theta(2k\pi)^2}. \end{aligned}$$

d. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on a d'après **c.** corrigé :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{2\pi} H(x) \cos(nx) \, dx - \int_0^{2\pi} H_N(x) \cos(nx) \, dx \right| &= \left| \int_0^{2\pi} (H(x) - H_N(x)) \cos(nx) \, dx \right| \\ &\leq \int_0^{2\pi} |H(x) - H_N(x)| |\cos(nx)| \, dx \leq 2 \sum_{k=N}^{\infty} e^{-\theta(2k\pi)^2} \int_0^{2\pi} |\cos(nx)| \, dx. \end{aligned}$$

Puisque le membre de droite tend vers 0 lorsque $N \rightarrow \infty$ comme reste d'une série convergente d'après **9.a.**, il en ressort par encadrement que :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} H_N(x) \cos(nx) \, dx = \int_0^{2\pi} H(x) \cos(nx) \, dx.$$

Par unicité de la limite, changement de variable affine $t = \sqrt{\theta}u$ et d'après **5.c.** et **b.**, on a alors finalement :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} H(x) \cos(nx) \, dx &= 2 \int_0^{+\infty} e^{-\theta u^2} \cos(nu) \, du = \frac{2}{\sqrt{\theta}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos\left(\frac{n}{\sqrt{\theta}}t\right) \, dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{\theta}} F\left(\frac{n}{2\sqrt{\theta}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{\theta}} \exp\left(-\frac{n^2}{4\theta}\right). \end{aligned}$$

1. En effet,

$$|H(2\pi) - H_0(2\pi)| = \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} f(2\pi + 2k\pi) = \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}} f(2k\pi) > \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} f(2k\pi) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\theta(2k\pi)^2}$$

car $f(0) = 1 > e^{-\theta(2\pi)^2} = f(2\pi)$.

2. Hors-programme : la série ne converge pas uniformément sur \mathbb{R} , ni même son terme général vers 0...

11. a. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, il vient d'après 7.b. :

$$\begin{aligned} a_0 + 2 \sum_{n=1}^N a_n \cos(nx) &= \int_0^{2\pi} H(u) \left(1 + 2 \sum_{n=1}^N \cos(nu) \cos(nx) \right) du \\ &= \int_0^{2\pi} H(u) \left(1 + \sum_{n=1}^N [\cos(n(u+x)) + \cos(n(u-x))] \right) du \\ &= \int_0^{2\pi} H(u) (\varphi_N(u+x) + \varphi_N(u-x)) du, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

b. On a d'après les questions a. et 8., compte-tenu de la 2π -périodicité de H et φ_N :

$$\begin{aligned} a_0 + 2 \sum_{n=1}^N a_n \cos(nx) &= \int_x^{x+2\pi} H(v-x) \varphi_N(v) dv + \int_{-x}^{-x+2\pi} H(v+x) \varphi_N(v) dv \\ &= \int_0^{2\pi} H(v-x) \varphi_N(v) dv + \int_0^{2\pi} H(v+x) \varphi_N(v) dv \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{H(v+x) + H(v-x)}{2 \sin \frac{v}{2}} \sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)v\right) dv. \end{aligned}$$

c. La continuité (admise) de H sur \mathbb{R} entraîne celle de K_x sur $]0, 2\pi[$. La dérivabilité (elle aussi admise) de H en x garantit par ailleurs que :

$$H(x+v) = H(x) + H'(x)v + o(v), \quad v \rightarrow 0$$

et, par parité de H ,

$$H(v-x) = H(x-v) = H(x) - H'(x)v + o(v), \quad v \rightarrow 0$$

d'où l'on tire

$$K_x(v) = \frac{H(v+x) + H(v-x) - 2H(x)}{2 \sin \frac{v}{2}} = \frac{o(v)}{v + o(v)} = \frac{o(1)}{1 + o(1)} \rightarrow 0, \quad v \rightarrow 0$$

si bien que K_x est continue en 0. Enfin, en remarquant que :

$$\begin{aligned} \forall v \in]0, 2\pi[, \quad K_x(2\pi - v) &= \frac{H(2\pi - v + x) + H(2\pi - v - x) - 2H(x)}{2 \sin(\pi - \frac{v}{2})} \\ &= \frac{H(v-x) + H(v+x) - 2H(x)}{2 \sin \frac{v}{2}} = K_x(v) \end{aligned}$$

par parité et 2π -périodicité de H , on en déduit que K_x est également continue en 2π .

d. En s'appuyant sur les questions 7.c. et b., on obtient pour $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} a_0 + 2 \sum_{n=1}^N a_n \cos(nx) - 2\pi H(x) &= \int_0^{2\pi} (H(v+x) + H(v-x)) \varphi_N(v) dv - 2H(x) \int_0^{2\pi} \varphi_N(v) dv \\ &= \int_0^{2\pi} (H(v+x) + H(v-x) - 2H(x)) \varphi_N(v) dv = \int_0^{2\pi} K_x(v) \sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)v\right) dv. \end{aligned}$$

12. a. Pour $\lambda > 0$, il vient par intégration par parties :

$$\int_0^1 g(t) \sin(\lambda t) dt = \left[\frac{-1}{\lambda} g(t) \cos(\lambda t) \right]_0^1 + \frac{1}{\lambda} \int_0^1 g'(t) \cos(\lambda t) dt$$

de sorte que :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 g(t) \sin(\lambda t) dt \right| &\leq \frac{1}{\lambda} |g(0) - g(1) \cos \lambda| + \frac{1}{\lambda} \left| \int_0^1 g'(t) \cos(\lambda t) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{\lambda} \left(|g(0)| + |g(1)| + \int_0^1 |g'(t)| dt \right) \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

et, par encadrement,

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^1 g(t) \sin(\lambda t) dt = 0.$$

- b.** En appliquant le résultat de la question **a.** à la fonction K_x , continue sur $[0, 2\pi]$ d'après **11.c.**, on obtient d'après **11.d.** :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(a_0 + 2 \sum_{n=1}^N a_n \cos(nx) \right) = 2\pi H(x).$$

Or, en utilisant l'expression des coefficients a_n établie en **10.d.**, on a :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad a_0 + 2 \sum_{n=1}^N a_n \cos(nx) = \sqrt{\frac{\pi}{\theta}} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^N \exp\left(-\frac{n^2}{4\theta}\right) \cos(nx) \right),$$

d'où l'on déduit le résultat :

$$\frac{1}{\sqrt{\pi\theta}} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{n^2}{4\theta}\right) \cos(nx) \right) = H(x) = e^{-\theta x^2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\theta(x+2k\pi)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\theta(x-2k\pi)^2}.$$

Quatrième partie

- 13. a.** On peut compléter le code comme indiqué (cf. questions **b.** et **c.** pour l'interprétation des variables) :

Listing 1 : simulation du jeu

```

1 fonction v=jeu(p)
2     i=1; v=1; s=1; j=1;
3     while (rand()>p) // le lancer renvoie face
4         i=i+1; j=j+1; // on prépare le lancer suivant
5         if (j>s) then v=-v; s=s+2; j=1; end // changement de main
6     end
7     if (v==1) then disp('A vainqueur'); else disp('B vainqueur'); end
8 endfunction

```

Remarque. Curieuse fonction qui, en plus de renvoyer le résultat, l'affiche... On va s'en mordre les doigts en **e.**!

- b.** Après l'exécution de la fonction `jeu`, la variable `i` ne représente... rien : c'est une variable locale ! Trève de mauvais esprit : il s'agit du nombre de lancers effectués au cours du jeu. Au cours de l'exécution de la fonction, la variable `i` représente le rang du lancer à venir. Quant à la variable `j`, elle représente le rang du prochain lancer depuis le dernier changement de main. De son côté, la variable `s` représente le nombre maximal de lancers entre le dernier changement de main et le suivant.
- c.** À chaque étape de l'exécution de la fonction `jeu`, la variable `v` désigne le joueur qui se prépare à lancer la pièce : elle vaut 1 lorsqu'il s'agit de A et -1 lorsqu'il s'agit de B.
- d.** Il suffit d'utiliser une variable `k` que l'on initialise par `k=1` ; en ligne 2 et que l'on incrémente entre les lignes 5 et 6 par l'instruction

```
if (v==1) then k=k+1; end
```

- e.** En s'appuyant sur la méthode de Monte-Carlo d'approximation d'une probabilité, on peut proposer le script suivant.

Listing 2 : approximation de la probabilité de victoire de A

```

fonction y=approx_PVA(p)
    N=10^4; // nombre d'expériences dans la MMC
    y=0;
    for n=1:N
        if (jeu(p)==1) then y=y+1; end
    end
    y=y/N;
endfunction

```

Remarque. Le nombre `N` peut être ajusté en fonction de la précision dans l'approximation de la probabilité et du niveau de confiance $1 - \alpha$ souhaités.

Dans toute la suite, on notera \mathbb{P} plutôt que \mathbb{P}_p pour ne pas alourdir inutilement les notations.

14. a. Classiquement, on finit presque sûrement par obtenir un pile au cours des lancers successifs, ce qui signifie que $\mathbb{P}(H \cup K) = 1$.

Le fait que la suite de lancers soit tronquée complique légèrement la situation. En notant, pour $n \in \mathbb{N}^*$, F_n l'événement « on effectue au moins n lancers et le n -ième lancer renvoie face », on a par limite monotone :

$$\mathbb{P}(\overline{H \cup K}) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \geq 1} F_n\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^N F_n\right)$$

où, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, la formule des probabilités composées³ donne :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^N F_n\right) = \mathbb{P}(F_1) \mathbb{P}_{F_1}(F_2) \mathbb{P}_{F_1 \cap F_2}(F_3) \cdots \mathbb{P}_{F_1 \cap \dots \cap F_{N-1}}(F_N) = p^N.$$

Il en ressort, sachant $0 < p < 1$, que $\mathbb{P}(H \cup K) = 1$.

La variable $X + Y$ donne alors le temps d'attente du premier succès (apparition de pile) lors d'une suite (tronquée après le premier succès) d'expériences de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p . Classiquement (adapter le raisonnement standard comme ci-dessus), elle suit donc la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

- b. De l'inclusion évidente $[X = 1] \subset H$, on déduit que $p \leq \mathbb{P}(H) \leq 1$, si bien que $\mathbb{P}(H)$ converge vers 1 lorsque $p \rightarrow 1$ par encadrement.
15. a. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit c_n le rang du premier lancer après le n -ième changement de main dans l'éventualité improbable où le côté face sortirait à chaque lancer, en convenant que $c_0 = 1$. La n -ième série de lancers (i.e. celle délimitée par les $n - 1$ -ième et n -ième changements de main) est alors constituée des $2n - 1$ lancers correspondant aux rangs c_{n-1} à $c_n - 1$ si bien que $c_n = c_{n-1} + 2n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On démontre alors par une récurrence aisée que $c_n = n^2 + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De retour au cas général, le joueur A n'est susceptible de gagner qu'après un nombre pair de changements de main, de sorte que l'ensemble I des rangs de victoire possible du joueur A est donné par :

$$I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \llbracket c_{2n}, c_{2n+1} - 1 \rrbracket = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \llbracket 4n^2 + 1, 4n^2 + 4n + 1 \rrbracket.$$

- b. D'après a., sachant que le rang de victoire du gagnant est donné par $X + Y$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(H) &= \mathbb{P}(X + Y \in I) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [X + Y \in \llbracket 4n^2 + 1, 4n^2 + 4n + 1 \rrbracket]\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X + Y \in \llbracket 4n^2 + 1, 4n^2 + 4n + 1 \rrbracket) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbb{P}(X + Y \leq 4n^2 + 4n + 1) - \mathbb{P}(X + Y < 4n^2 + 1)) \end{aligned}$$

car l'union est disjointe. En notant

$$F_p : n \in \mathbb{N}^* \longmapsto \mathbb{P}(T \leq n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(T = k) = \sum_{k=1}^n (1 - p)^{k-1} p = 1 - (1 - p)^n$$

la (restriction à \mathbb{N}^*) de la fonction de répartition d'une variable T de loi géométrique de paramètre p , on a donc :

$$\mathbb{P}(H) = \sum_{n=0}^{\infty} (F_p(4n^2 + 4n + 1) - F_p(4n^2)) = \sum_{n=0}^{\infty} ((1 - p)^{4n^2} - (1 - p)^{4n^2 + 4n + 1}).$$

On monterait de même que :

$$J = \bigcup_{n \geq 1} \llbracket c_{2n-1}, c_{2n} - 1 \rrbracket = \bigcup_{n \geq 1} \llbracket 4n^2 - 4n + 2, 4n^2 \rrbracket$$

puis

$$\mathbb{P}(K) = \sum_{n=1}^{\infty} ((1 - p)^{4n^2 - 4n + 1} - (1 - p)^{4n^2}).$$

3. Les événements $F_n, n \in \mathbb{N}^*$, ne sont pas indépendants (la suite (F_n) est décroissante).

16. a. En appliquant la formule de la question **12.b.** avec $x = \pi$ et $\theta = -\frac{1}{4\ln(1-p)} > 0$, on obtient :

$$\frac{1}{\sqrt{\pi\theta}} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1-p)^{n^2} \right) = H(x) \geq e^{-\theta x^2} > 0,$$

si bien que

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (1-p)^{n^2} > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

b. D'après les questions **15.b.** et **a.**, et compte-tenu de la convergence des deux séries au membre central ci-dessous (par comparaison à une série de Riemann ou une série géométrique),

$$\mathbb{P}(H) = \sum_{n=0}^{\infty} (1-p)^{(2n)^2} - \sum_{n=0}^{\infty} (1-p)^{(2n+1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (1-p)^{n^2} > \frac{1}{2}.$$

Le jeu est donc à l'avantage du joueur A, dont la probabilité de victoire est strictement supérieure à celle de B.

