ESSEC 2018

Éléments de correction

Remarque. On s'éloignera parfois un peu des notations de l'énoncé, qui ne sont pas toujours les plus cohérentes pour permettre d'exposer clairement son raisonnement.

Première partie

1. Soient $x \in [-r, r]$ et $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant n^k |a_n| |x|^n \leqslant n^k |a_n| r^n$, ce qui entraîne la convergence de la série $\sum_n n^k |a_n| |x|^n$ par comparaison à la série $\sum_n n^k |a_n| r^n$, convergente puisque $(a_n)_n \in \mathrm{A}(r)$ par hypothèse.
En particulier, pour $0 < x = r' \leqslant r$, le résultat établi ci-dessus montre que $(a_n)_n \in \mathrm{A}(r')$, et le raisonnement dans son ensemble justifie l'inclusion $\mathrm{A}(r) \subset \mathrm{A}(r')$.

2. Soient deux réels r et r' tels que $0 < r' \leqslant r$. Étant donnée une suite $(a_n)_n$, l'inégalité de la question **1.** écrite pour $k = 0$ et $x = r' \in [-r, r]$ met en évidence que la convergence de $(a_n r^n)_n$ vers 0 entraîne par encadrement celle de $(a_n r'^n)_n$ vers 0, ce qui justifie la première inclusion $\mathrm{B}(r) \subset \mathrm{B}(r')$.
Enfin, puisque la convergence de la série $\sum_n n^k |a_n| r^n$ pour $k = 0$ entraîne la convergence de son terme général vers 0, on a l'inclusion $\mathrm{A}(r) \subset \mathrm{B}(r)$.

3. Soit $r > 0$. La suite nulle appartient bien sûr à $\mathrm{A}(r)$. Étant données deux suites $(a_n)_n, (b_n)_n \in \mathrm{A}(r)$ et un réel λ, on a pour $k \in \mathbb{N}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant n^k |\lambda a_n + b_n| r^n \leqslant |\lambda| n^k |a_n| r^n + n^k |b_n| r^n,$$

de sorte que la série $\sum_n n^k |\lambda a_n + b_n| r^n$ converge par comparaison aux séries convergentes $\sum_n n^k |a_n| r^n$ et $\sum_n |b_n| r^n$: la suite $\lambda(a_n)_n + (b_n)_n$ appartient donc à $\mathrm{A}(r)$. Ainsi $\mathrm{A}(r)$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Remarque. On peut également remarquer, pour la suite, que l'ensemble $\mathrm{B}(r)$ (qui est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$) est stable par l'opérateur de décalage $(a_n)_n \longmapsto (a_{n+1})_n$: si $(a_n r^n)_n$ converge vers 0, alors $a_{n+1} r^n = \frac{a_{n+1} r^{n+1}}{r}$ tend vers 0 lorsque $n \to \infty$.

4. **a.** Pour $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+1}(k)}{u_n(k)} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{k+2} \frac{r}{n+1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 < 1,$$

si bien qu'il existe un rang n_0 (dépendant de k) tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $\frac{u_{n+1}(k)}{u_n(k)} \leqslant \frac{1}{2}$ puis, par récurrence immédiate :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad 0 \leqslant u_n(k) \leqslant \frac{u_{n_0}(k)}{2^{n-n_0}},$$

d'où l'on déduit par encadrement que $u_n(k) = n^2 n^k \alpha_n r^n$ tend vers 0 lorsque $n \to \infty$. Il en ressort que $0 \leqslant n^k |\alpha_n| r^n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ lorsque $n \to \infty$, et donc que la série $\sum_n n^k |\alpha_n| r^n$ converge par comparaison à la série de Riemann convergente $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$. La suite α appartient donc à $\mathrm{A}(r)$.

b. Étant donnés deux réels $\lambda, r > 0$, la suite $\beta(\lambda)$ appartient à $\mathrm{B}(r)$ si, et seulement si, la suite géométrique $(\lambda^n r^n)_n$ converge vers 0 c'est-à-dire si, et seulement si, $|\lambda r| < 1$ ou encore $0 < r < \frac{1}{\lambda}$.
Lorsque $0 < r < \frac{1}{\lambda}$, la suite $(n^{k+2} \lambda^n r^n)_n$ converge vers 0 pour tout $k \in \mathbb{N}$ par croissances comparées, et l'on en déduit comme en **a.** que la série $\sum_n n^k \lambda^n r^n$ converge : la suite $\beta(\lambda)$ appartient alors à $\mathrm{A}(r)$.
Pour $r \geqslant \frac{1}{\lambda}$ en revanche, la série $\sum_n \lambda^n r^n$ est grossièrement divergente et la suite $\beta(\lambda)$ n'appartient pas à $\mathrm{A}(r)$. En conclusion, la suite $\beta(\lambda)$ appartient à $\mathrm{A}(r)$ si, et seulement si, $0 < r < \frac{1}{\lambda}$.

5. Soit $r \in]0, \varrho[$. Pour $k \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant n^k |a_n| r^n = |a_n| \varrho^n \cdot n^k \left(\frac{r}{\varrho}\right)^n = o\left(n^k \left(\frac{r}{\varrho}\right)^n\right), \quad n \to \infty$$

car le facteur $|a_n| \varrho^n$ tend vers 0 lorsque $n \to \infty$, d'où l'on déduit la convergence de la série $\sum_n n^k |a_n| r^n$ par comparaison à la série $\sum_n n^k \left(\frac{r}{\varrho}\right)^n$, convergente d'après **4.b.** puisque $0 < r < \varrho$: la suite $(a_n)_n$ appartient donc à $\mathrm{A}(r)$.

Deuxième partie

6. La série $\sum_n a_n x^n$ est clairement convergente pour $x = 0$. Pour $x \in]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[\setminus \{0\}$, elle est absolument convergente d'après la question **5.** appliquée à $r = |x| < \mathrm{R}$ sachant que $(a_n) \in \mathrm{B}(\mathrm{R})$ par hypothèse.

7. a. Par application sur $[x, x+h] \subset [-r, r]$ de l'inégalité des accroissements finis à la fonction $\varphi_n : t \longmapsto t^n$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-r, r]$ telle que $|\varphi_n'(t)| = n\,|t|^{n-1} \leqslant nr^{n-1}$ pour tout $t \in [-r, r]$, on obtient

$$|(x+h)^n - x^n| = |\varphi_n(x+h) - \varphi_n(x)| \leqslant nr^{n-1}\,|h|\,.$$

b. D'après **a.**, pour $x \in [-r, r]$ et h tel que $x + h \in [-r, r]$,

$$\begin{aligned}|f_a(x+h) - f_a(x)| &= \Big|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\big((x+h)^n - x^n\big)\Big| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\,|(x+h)^n - x^n| \\ &\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\, nr^{n-1}\,|h| = \frac{|h|}{r}\sum_{n=0}^{\infty} n\,|a_n|\,r^n,\end{aligned}$$

toutes séries convergentes d'après **5.**.

c. De l'inégalité établie en **b.**, on déduit par encadrement que $f_a(x+h) \to f_a(x)$ lorsque $h \to 0$ sous la contrainte $x + h \in [-r, r]$. Ainsi la restriction à $[-r, r]$ de f_a est-elle continue [1].
Étant donné un réel $x \in]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$, il existe alors $r \in]0, \mathrm{R}[$ tel que $x \in]-r, r[$. Comme la continuité est une notion locale, la continuité de la restriction $f_a|_{[-r,r]}$ au point intérieur x donne celle de la fonction f_a au même point, et l'on justifie ainsi que f_a est continue sur $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$.

8. a. Sachant que $(a_n) \in \mathrm{B}(\mathrm{R})$ et que $0 < \varrho < \mathrm{R}$, la question **5.** assure que $(a_n) \in \mathrm{A}(\varrho)$. Il en résulte en particulier que la série $\sum_n n\,|a_n|\,\varrho^n$ converge et par conséquent que la suite $(n\,|a_n|\,\varrho^n)$ converge vers 0 : la suite $(na_n)_n$ appartient donc à $\mathrm{B}(\varrho)$. D'après la remarque suivant la question **3.**, on peut alors appliquer les questions **6.** et **7.** à la suite $\big((n+1)a_{n+1}\big)_n$, qui garantissent que la fonction

$$x \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} = g_a(x)$$

est bien définie et continue sur $]-\varrho, \varrho[$. Puisque le réel ϱ est un élément quelconque de l'intervalle $[r, \mathrm{R}[$, il en ressort par un raisonnement analogue à celui mené en **7.c.** que g_a est bien définie et continue sur $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$.

b. C'est une application immédiate du théorème fondamental à la fonction S_n, polynomiale donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$: pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{S}_n(x) = \mathrm{S}_n(0) + \int_0^x \mathrm{S}_n'(t)\,\mathrm{d}t = a_0 + \int_0^x \mathrm{S}_n'(t)\,\mathrm{d}t.$$

c. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, r]$,

$$\begin{aligned}\Big|\int_0^x \big(g_a(t) - \mathrm{S}_n'(t)\big)\,\mathrm{d}t\Big| &= \Big|\int_0^x \Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} ka_k t^{k-1}\Big)\,\mathrm{d}t\Big| \leqslant \int_0^x \Big|\sum_{k=n+1}^{\infty} ka_k t^{k-1}\Big|\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_0^x \Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} k\,|a_k|\,t^{k-1}\Big)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} k\,|a_k|\,r^{k-1}\Big)\,\mathrm{d}t \\ &= x\sum_{k=n+1}^{\infty} k\,|a_k|\,r^{k-1} \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} k\,|a_k|\,r^k.\end{aligned}$$

Pour $x \in [-r, 0]$, on procède de même après avoir pris soin de réordonner les bornes d'intégration par ordre croissant (derrière les valeurs absolues), afin de pouvoir utiliser l'inégalité triangulaire et la croissance de l'intégrale :

$$\Big|\int_0^x \big(g_a(t) - \mathrm{S}_n'(t)\big)\,\mathrm{d}t\Big| \leqslant \int_x^0 \Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} k\,|a_k|\,r^{k-1}\Big)\,\mathrm{d}t = |x|\sum_{k=n+1}^{\infty} k\,|a_k|\,r^{k-1} \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} k\,|a_k|\,r^k.$$

d. D'après la question **c.**,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \Big|\int_0^x g_a(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x \mathrm{S}_n'(t)\,\mathrm{d}t\Big| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} k\,|a_k|\,r^k,$$

1. C'est le sens donné à la continuité de f_a *sur* $[-r, r]$, mais attention : cela ne donne que la continuité à gauche de f_a en r.

où le membre de droite converge vers 0 lorsque $n \to \infty$ comme reste d'une série convergente. Par encadrement, on en déduit que :

$$\int_0^x g_a(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \int_0^x \mathrm{S}_n'(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_0^x k a_k t^{k-1}\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k x^k = f_a(x) - a_0,$$

d'où le résultat.

e. Puisque la fonction g_a est continue sur $]-\mathrm{R},\mathrm{R}[$ d'après **a.**, la fonction $x \longmapsto \int_0^x g_a(t)\,\mathrm{d}t$ en est par théorème une primitive $\mathscr{C}^1$. Vu la formule établie en **d.**, la fonction f_a est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\mathrm{R},\mathrm{R}[$, de dérivée g_a.

9. a. Pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\forall n \geqslant k, \quad \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \sim \frac{n^k}{k!}, \quad n \to \infty,$$

si bien que :

$$0 \leqslant n^k |a_n| r^n \sim k! r^k \cdot \binom{n}{k} |a_n| r^{n-k}, \quad n \to \infty.$$

Par suite, les séries $\sum_n n^k |a_n| r^n$ et $\sum_n \binom{n}{k} |a_n| r^{n-k}$ sont de même nature. Dans ces conditions, la suite $(a_n)_n$ appartient à $\mathrm{A}(r)$ si, et seulement si, la série $\sum_n \binom{n}{k} |a_n| r^{n-k}$ converge pour tout $k \in \mathbb{N}$.

b. On montre par récurrence sur $k \geqslant 0$ que pour toute suite $(a_n)_n \in \mathrm{B}(\mathrm{R})$, la fonction f_a est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $]-\mathrm{R},\mathrm{R}[$ avec :

$$\forall x \in]-\mathrm{R},\mathrm{R}[, \quad f_a^{(k)}(x) = k! \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} a_n x^{n-k}.$$

Le résultat a été établi au rang $k = 0$ dans la question **7.**. S'il est acquis à un rang $k \geqslant 0$ et si $(a_n)_n$ est une suite de $\mathrm{B}(\mathrm{R})$ alors, d'après l'hypothèse de récurrence appliquée (cf. remarque suivant la question **3.**) à la suite $\big((n+1)a_{n+1}\big)_n$, la fonction

$$g_a : x \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $]-\mathrm{R},\mathrm{R}[$, avec :

$$\begin{aligned}\forall x \in]-\mathrm{R},\mathrm{R}[, \quad g_a^{(k)}(x) &= k! \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} (n+1) a_{n+1} x^{n-k} = (k+1)! \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n+1}{k+1} a_{n+1} x^{n-k} \\ &= (k+1)! \sum_{n=k+1}^{\infty} \binom{n}{k+1} a_n x^{n-(k+1)},\end{aligned}$$

d'où le résultat d'après **8.e.** : f_a est de classe $\mathscr{C}^{k+1}$ sur $]-\mathrm{R},\mathrm{R}[$ avec $f_a^{(k+1)} = g_a^{(k)}$.

c. En évaluant en $x = 0$ la formule établie en **b.**, on obtient :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_k = \frac{f_a^{(k)}(0)}{k!}.$$

10. a. On a classiquement :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathbf{e}^x$$

et $f_\alpha^{(k)}(1) = \mathbf{e}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

b. On a :

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}\right[, \quad f_\beta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n x^n = \frac{1}{1-\lambda x}.$$

Il apparaît que la fonction f_β est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\left]-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}\right[$ avec, par récurrence immédiate :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \left]-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}\right[, \quad f_\beta^{(k)}(x) = \frac{k!\lambda^k}{(1-\lambda x)^{k+1}}.$$

En appliquant, pour $0 < \varrho < \frac{1}{\lambda}$, la question **9.b.** à la suite $\beta \in \mathrm{B}(\varrho)$, on obtient donc :

$$\forall x \in]-\varrho, \varrho[, \quad \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} (\lambda x)^{n-k} = \frac{f_\beta^{(k)}(x)}{k!\lambda^k} = \frac{1}{(1-\lambda x)^{k+1}}$$

avec convergence de la série, puis le résultat s'étend à tout $x \in \left]-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}\right[$ puisque ϱ est quelconque dans $\left]0, \frac{1}{\lambda}\right[$.

Troisième partie

11. **a.** En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral entre 1 et 0 à la fonction f_a, de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-\mathrm{R},\mathrm{R}[$ avec $\mathrm{R}>1$ d'après **9.b.**, il vient pour $\mathrm{N}\in\mathbb{N}$:

$$f_a(0)=\sum_{k=0}^{\mathrm{N}}\frac{f_a^{(k)}(1)}{k!}(-1)^k+\int_1^0\frac{(-t)^{\mathrm{N}}}{\mathrm{N}!}f_a^{(\mathrm{N}+1)}(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{\mathrm{N}}(-1)^k b_k+(-1)^{\mathrm{N}+1}\int_0^1\frac{t^{\mathrm{N}}}{\mathrm{N}!}f_a^{(\mathrm{N}+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

b. Toujours d'après **9.b.**, on a :

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad \forall x\in[0,\mathrm{R}[,\quad f_a^{(k)}(x)=k!\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}a_n x^{n-k}\geqslant 0.$$

Par suite, les dérivées successives de f_a sont positives et croissantes sur $[0,\mathrm{R}[$. Dès lors,

$$\forall \mathrm{N}\in\mathbb{N},\quad 0\leqslant\int_0^1\frac{t^{\mathrm{N}}}{\mathrm{N}!}f_a^{(\mathrm{N}+1)}(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1\frac{t^{\mathrm{N}}}{\mathrm{N}!}f_a^{(\mathrm{N}+1)}(1)\,\mathrm{d}t=\frac{f_a^{(\mathrm{N}+1)}(1)}{(\mathrm{N}+1)!}=b_{\mathrm{N}+1}\leqslant b_{\mathrm{N}+1}\varrho^{\mathrm{N}+1}$$

où le membre de droite converge vers 0 lorsque $\mathrm{N}\to\infty$ par hypothèse. Par conséquent,

$$\lim_{\mathrm{N}\to\infty}\int_0^1\frac{t^{\mathrm{N}}}{\mathrm{N}!}f_a^{(\mathrm{N}+1)}(t)\,\mathrm{d}t=0.$$

c. D'après les questions **a.** et **b.**, la série $\sum_k(-1)^k b_k$ converge avec :

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k b_k=f_a(0)=a_0.$$

12. **a.** Il s'agit là encore d'une application directe de la formule de Taylor avec reste intégral, comme en **11.a.**, cette fois-ci à la fonction $f_a^{(s)}$.

b. Comme en **11.b.**, la positivité et la croissance de $f_a^{(\mathrm{N}+s+1)}$ sur $[0,\mathrm{R}[$ amènent :

$$\forall \mathrm{N}\in\mathbb{N},\quad 0\leqslant\int_0^1\frac{t^{\mathrm{N}}}{\mathrm{N}!}f_a^{(\mathrm{N}+s+1)}(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{f_a^{(\mathrm{N}+s+1)}(1)}{(\mathrm{N}+1)!}=b_{\mathrm{N}+s+1}\varrho^{\mathrm{N}+s+1}\cdot\frac{(\mathrm{N}+s+1)!}{(\mathrm{N}+1)!}\frac{1}{\varrho^{\mathrm{N}+s+1}}.$$

c. Au second membre de l'inégalité établie en **b.**, $b_{\mathrm{N}+s+1}\varrho^{\mathrm{N}+s+1}$ tend vers 0 lorsque $\mathrm{N}\to\infty$ par hypothèse, ainsi que

$$\frac{(\mathrm{N}+s+1)!}{(\mathrm{N}+1)!}\frac{1}{\varrho^{\mathrm{N}+s+1}}=\frac{(\mathrm{N}+s+1)\cdots(\mathrm{N}+2)}{\varrho^{\mathrm{N}+s+1}}\sim\frac{\mathrm{N}^s}{\varrho^{\mathrm{N}+s+1}},\quad \mathrm{N}\to\infty$$

car $\varrho>1$. Il en ressort par encadrement que

$$\lim_{\mathrm{N}\to\infty}\int_0^1\frac{t^{\mathrm{N}}}{\mathrm{N}!}f_a^{(\mathrm{N}+s+1)}(t)\,\mathrm{d}t=0.$$

d. Des questions **a.** et **c.**, on déduit la convergence de la série de terme général

$$(-1)^k\frac{f_a^{(k+s)}(1)}{k!}=(-1)^k\frac{(k+s)!}{k!}b_{k+s}=s!(-1)^k\binom{k+s}{s}b_{k+s},\quad k\geqslant 0$$

avec, d'après **9.c.** :

$$a_s=\frac{f_a^{(s)}(0)}{s!}=\frac{1}{s!}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{f_a^{(k+s)}(1)}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{k+s}{s}b_{k+s}=\sum_{n=s}^{\infty}(-1)^{n-s}\binom{n}{s}b_n.$$

13. **a.** Dans les conditions de l'énoncé, la fonction f_a est polynomiale de degré inférieur ou égal à d.

b. D'après **a.**, on a $f_a^{(n)}=0$ et donc $b_n=0$ pour tout $n\geqslant d+1$, si bien que la condition (H) est réalisée : la suite $(b_n\varrho^n)_n$ converge vers 0 pour tout réel $\varrho>1$.

c. La formule de la question **12.d.** s'applique donc et devient :

$$\forall s\in[\![0,d]\!],\quad a_s=\sum_{n=s}^{d}(-1)^{n-s}\binom{n}{s}b_n.$$

Quatrième partie

14. a. La série $\sum_n a_n = \sum_n \mathbb{P}(X = n)$ étant convergente, son terme général converge vers 0 : la suite $(a_n)_n$ appartient à $B(1)$.

b. Dans ces conditions, la fonction $G_X = f_a$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$ d'après la question **9.b.**.

15. a. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_X(x) = \mathbf{e}^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathbf{e}^{x-1}.$$

Il apparaît que la fonction G_X est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec, pour tout $s \in \mathbb{N}$, $G_X^{(s)}(x) = \mathbf{e}^{x-1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et en particulier $G_X^{(s)}(1) = 1$.

b. Dans les conditions de l'énoncé, on a $b_n = \frac{1}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si bien que $(b_n \varrho^n)_n$ converge vers 0 pour tout $\varrho > 1$ comme terme général d'une série exponentielle convergente : l'hypothèse (H) est donc satisfaite. Par suite, la formule de la question **12.d.** s'applique et donne :

$$\forall s \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = s) = a_s = \sum_{n=s}^{\infty} (-1)^{n-s} \binom{n}{s} \frac{1}{n!} = \sum_{n=s}^{\infty} \frac{(-1)^{n-s}}{s!(n-s)!} = \frac{1}{s!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{\mathbf{e}^{-1}}{s!}.$$

La variable X suit donc la loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$.

16. a. Il vient $a_n = \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X + 1 = n + 1) = pq^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis :

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right[, \quad G_X(x) = p \sum_{n=0}^{\infty} q^n x^n = \frac{p}{1 - qx}.$$

Il apparaît que G_X est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\left]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right[$ avec :

$$\forall s \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \left]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right[, \quad G_X^{(s)}(x) = \frac{pq^s s!}{(1 - qx)^{s+1}}.$$

En particulier, $G_X^{(s)}(1) = s!\left(\frac{q}{p}\right)^s$ pour tout $s \in \mathbb{N}$.

b. La fonction $p \mapsto \frac{q}{p} = \frac{1}{p} - 1$ est décroissante sur $]0, 1[$ si bien que pour $p > \frac{1}{2}$, on a $\frac{q}{p} < \frac{1-1/2}{1/2} = 1$. Sous les conditions de l'énoncé, on a $b_n = \left(\frac{q}{p}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, si bien que $(b_n \varrho^n)_n$ converge vers 0 pour tout ϱ tel que $1 < \varrho < \frac{p}{q}$: l'hypothèse (H) est donc vérifiée. La question **12.d.** s'applique alors et donne :

$$\begin{aligned}\forall s \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = s) = a_s &= \sum_{n=s}^{\infty} (-1)^{n-s} \binom{n}{s} \left(\frac{q}{p}\right)^n = \left(\frac{q}{p}\right)^s \sum_{n=s}^{\infty} \binom{n}{s} \left(-\frac{q}{p}\right)^{n-s} \\ &= \left(\frac{q}{p}\right)^s \frac{1}{\left(1 + \frac{q}{p}\right)^{s+1}} = pq^s\end{aligned}$$

d'après **10.b.** sachant $\left|-\frac{q}{p}\right| < 1$. Il en ressort comme en **a.** que $X + 1$ suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

Remarque. Sur les exemples examinés dans les deux questions précédentes (et plus généralement dès que la condition (H) est réalisée), il apparaît que réels $G_X^{(s)}(1)$, $s \in \mathbb{N}$, caractérisent la loi de X lorsque $R > 1$: c'est en fait un résultat général. En utilisant le théorème de transfert, on peut montrer que la donnée de la suite $\left(G_X^{(s)}(1)\right)_s$ équivaut à celle de la suite $\left(\mathbb{E}(X^s)\right)_s$, ce que l'énoncé formalise dans la question suivante pour les variables finies.

17. On note $\mathcal{P}_d$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ constitué des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à d.

a. Les polynômes $H_0, H_1, \ldots, H_d$ sont non nuls et de degrés deux-à-deux distincts : ils forment donc une famille libre de $\mathcal{P}_d$, formée de $d + 1 = \dim \mathcal{P}_d$ vecteurs, c'est-à-dire une base de $\mathcal{P}_d$.

b. C'est immédiat : Δ est clairement linéaire sur $\mathcal{P}_d$ et à valeurs dans $\mathcal{P}_d$.

c. On a bien sûr $\Delta(H_0) = 0$ et, pour $s \in [\![1, d]\!]$,

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Delta(H_s)(x) &= \frac{(x+1)x \cdots (x-s+2)}{s!} - \frac{x(x-1) \cdots (x-s+1)}{s!} \\ &= \frac{x(x-1) \cdots (x-s+2)}{s!} \big((x+1) - (x-s+1)\big) \\ &= \frac{x(x-1) \cdots (x-s+2)}{(s-1)!} = H_{s-1}(x)\end{aligned}$$

ainsi que $H_s(0) = 0$.

d. On commence par vérifier la formule pour un polynôme $\mathrm{P} = \mathrm{H}_k$, $k \in [\![0, d]\!]$. Or, en itérant le résultat obtenu en **c.**, il vient :

$$\forall s \in [\![0, d]\!], \quad \Delta^s(\mathrm{H}_k) = \begin{cases} \mathrm{H}_{k-s} & \text{si } s \leqslant k \\ 0 & \text{si } s > k \end{cases}$$

si bien que

$$\forall s \in [\![0, d]\!], \quad \Delta^s(\mathrm{H}_k)(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } s = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

d'où finalement

$$\sum_{s=0}^{d} \big[\Delta^s(\mathrm{H}_k)(0)\big]\mathrm{H}_s = \mathrm{H}_k.$$

Puisque les applications $\mathrm{P} \longmapsto \mathrm{P}$ et $\mathrm{P} \longmapsto \sum_{s=0}^{d}\big[\Delta^s(\mathrm{P})(0)\big]\mathrm{H}_s$ sont linéaires sur $\mathcal{P}_d$ et coïncident comme on vient de le voir sur les vecteurs de la base $(\mathrm{H}_0, \mathrm{H}_1, \ldots, \mathrm{H}_d)$, elles sont donc égales :

$$\forall \mathrm{P} \in \mathcal{P}_d, \quad \mathrm{P} = \sum_{s=0}^{d} \big[\Delta^s(\mathrm{P})(0)\big]\mathrm{H}_s.$$

e. Il suffit d'appliquer la formule de la question **d.** au polynôme $\mathrm{P} = e_k$:

$$\forall k \in [\![0, d]\!], \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n^k = e_k(n) = \sum_{s=0}^{d} \big[\Delta^s(e_k)(0)\big]\mathrm{H}_s(n).$$

f. Pour $k \in [\![0, d]\!]$, il vient par transfert et d'après **e.** :

$$\mathbb{E}(\mathrm{X}^k) = \sum_{n=0}^{d} n^k a_n = \sum_{n=0}^{d}\sum_{s=0}^{d} \big[\Delta^s(e_k)(0)\big]\mathrm{H}_s(n)a_n = \sum_{s=0}^{d} \big[\Delta^s(e_k)(0)\big]\left(\sum_{n=0}^{d} \mathrm{H}_s(n)a_n\right)$$

où :

$$\forall s \in [\![0, d]\!], \quad \sum_{n=0}^{d} \mathrm{H}_s(n)a_n = \sum_{n=0}^{d} \frac{n(n-1)\cdots(n-s+1)}{s!}a_n = \frac{\mathrm{G}_{\mathrm{X}}^{(s)}(1)}{s!} = b_s,$$

ce qui conduit au résultat :

$$\mathbb{E}(\mathrm{X}^k) = \sum_{s=0}^{d} \big[\Delta^s(e_k)(0)\big]b_s.$$

g. En calculant les valeurs de $\Delta^s(e_k)(0)$, $0 \leqslant k, s \leqslant 2$, on explicite les relations de la question **f.** pour $k \in \{0, 1, 2\}$, qui permettent d'accéder aux valeurs de b_0, b_1, b_2 :

$$\begin{cases} b_0 = \mathbb{E}(\mathrm{X}^0) = 1 \\ b_1 = \mathbb{E}(\mathrm{X}) = 1 \\ b_1 + 2b_2 = \mathbb{E}(\mathrm{X}^2) = \frac{3}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} b_0 = 1 \\ b_1 = 1 \\ b_2 = \frac{1}{4} \end{cases}.$$

Vu **13.b.**, on peut alors appliquer la formule obtenue en **13.c.** pour obtenir :

$$a_0 = b_0 - b_1 + b_2 = \frac{1}{4}, \quad a_1 = b_1 - 2b_2 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad a_2 = b_2 = \frac{1}{4},$$

ce qui met en évidence que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(2, \frac{1}{2})$.