EMLYON 2018 S

Éléments de correction

Premier problème

Première partie

1. Il vient immédiatement :

$$\mathrm{W}_0 = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}u = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{W}_1 = \int_0^{\pi/2} \sin u \,\mathrm{d}u = 1.$$

2. a. Par intégration par parties,

$$\begin{aligned}\mathrm{W}_k - \mathrm{W}_{k+2} &= \int_0^{\pi/2} \sin^k u(1-\sin^2 u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{\pi/2} (\sin^k u \cos u)\cos u \,\mathrm{d}u \\ &= \left[\frac{\sin^{k+1} u}{k+1}\cos u\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{k+1} u}{k+1} \sin u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{k+1}\mathrm{W}_{k+2}.\end{aligned}$$

b. De la question **a.**, on déduit la relation de récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{W}_{k+2} = \frac{k+1}{k+2}\mathrm{W}_k,$$

qui permet d'établir la formule

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{W}_{2k} = \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\frac{\pi}{2}$$

par récurrence sur k. Elle est en effet immédiate au rang $k = 0$ d'après **1.** et, si elle est acquise à un rang $k \in \mathbb{N}$, alors

$$\mathrm{W}_{2(k+1)} = \mathrm{W}_{2k+2} = \frac{2k+1}{2k+2}\mathrm{W}_{2k} = \frac{2k+2}{2(k+1)}\frac{2k+1}{2(k+1)}\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{\big(2(k+1)\big)!}{2^{2(k+1)}\big((k+1)!\big)^2}\frac{\pi}{2}.$$

Deuxième partie

3. Pour $k \in \mathbb{N}$ donné, la fonction $t \longmapsto \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $[0,1[$. Le changement de variable $u \longmapsto t = \sin u$, de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement croissant de $[0, \frac{\pi}{2}[$ sur $[0,1[$, préserve la nature et la valeur de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^k u}{\sqrt{1-\sin^2 u}}\cos u\,\mathrm{d}u = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^k u}{\sqrt{\cos^2 u}}\cos u\,\mathrm{d}u = \mathrm{W}_k$$

(où $\cos u \geqslant 0$ pour tout $u \in [0, \frac{\pi}{2}]$). L'intégrale est donc convergente puisque la fonction $u \longmapsto \sin^k u$ est continue sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$.

4. a. Pour $x \in \mathbb{R}$ donné, la fonction $f_x : t \longmapsto \frac{\mathbf{e}^{xt}+\mathbf{e}^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $[0,1[$ avec, lorsque $x \geqslant 0$:

$$\forall t \in [0,1[, \quad 0 \leqslant f_x(t) \leqslant \frac{\mathbf{e}^x + 1}{\sqrt{1-t^2}},$$

si bien que l'intégrale $\mathrm{I}(x) = \int_0^1 f_x(t)\,\mathrm{d}t$ converge par comparaison à l'intégrale $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$, convergente d'après **3.**.
Pour $x \leqslant 0$, on a $f_x = f_{-x}$ où $-x \geqslant 0$, de sorte que l'intégrale $\mathrm{I}(x) = \int_0^1 f_x(t)\,\mathrm{d}t$ converge comme on vient de le voir, et vaut $\mathrm{I}(x) = \mathrm{I}(-x)$.
Ainsi la fonction I est-elle bien définie sur $\mathbb{R}$ et paire.

b. D'après **1.** et **3.**,

$$\mathrm{I}(0) = 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = 2\mathrm{W}_0 = \pi.$$

5. a. La fonction $g : u \longmapsto \mathbf{e}^u + \mathbf{e}^{-u}$ est de classe $\mathscr{C}^{2n+1}$ sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\forall k \in [\![0, 2n+1]\!], \quad \forall u \in \mathbb{R}, \quad g^{(k)}(u) = \mathbf{e}^u + (-1)^k \mathbf{e}^{-u}.$$

En particulier, puisque $xt \geqslant 0$ par hypothèse,

$$\forall u \in [0, xt], \quad \left|g^{(2n+1)}(u)\right| = \mathbf{e}^u - \mathbf{e}^{-u} \leqslant \mathbf{e}^u \leqslant \mathbf{e}^{xt} = \mathrm{M},$$

où M est un majorant indépendant de u.
On se trouve donc dans les conditions d'application de l'inégalité de Taylor-Lagrange :

$$\left|g(xt) - \sum_{k=0}^{2n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!}(xt)^k\right| \leqslant \frac{|xt|^{2n+1}}{(2n+1)!}\mathrm{M}$$

c'est-à-dire, grâce à un changement d'indice après avoir observé que $g^{(k)}(0)$ est nul lorsque k est impair et vaut 2 lorsque k est pair :

$$\left|\mathbf{e}^{xt} + \mathbf{e}^{-xt} - 2\sum_{k=0}^{n} \frac{(xt)^{2k}}{(2k)!}\right| \leqslant \frac{(xt)^{2n+1}}{(2n+1)!}\mathbf{e}^{xt} \leqslant \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\mathbf{e}^{x}$$

car $x \geqslant 0$ et $t \leqslant 1$ par hypothèse.

b. Pour $n \in \mathbb{N}$ donné, il vient d'après **3.** et **a.** :

$$\begin{aligned}\left|\mathrm{I}(x) - 2\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!}\mathrm{W}_{2k}\right| &= \left|\int_0^1 \left(\mathbf{e}^{xt} + \mathbf{e}^{-xt} - 2\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!}t^{2k}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}\right| \\ &\leqslant \int_0^1 \left|\mathbf{e}^{xt} + \mathbf{e}^{-xt} - 2\sum_{k=0}^{n} \frac{(xt)^{2k}}{(2k)!}\right|\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} \\ &\leqslant \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\mathbf{e}^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{2}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\mathbf{e}^x.\end{aligned}$$

c. Puisque le membre de droite dans l'inégalité de la question **b.** converge vers 0 lorsque $n \to \infty$ (car $\frac{x^n}{n!}$ tend vers 0comme terme général d'une série exponentielle convergente), il en ressort par encadrement que la série

$$\frac{2}{\pi}\sum_{k \geqslant 0} \frac{x^{2k}}{(2k)!}\mathrm{W}_{2k} = \sum_{k \geqslant 0} \frac{x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}$$

converge, avec :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} = \frac{1}{\pi}\lim_{n \to \infty} 2\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!}\mathrm{W}_{2k} = \frac{1}{\pi}\mathrm{I}(x).$$

Troisième partie

6. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. De l'inégalité immédiate

$$\forall t \in [0, 1[, \quad 0 \leqslant \frac{\mathbf{e}^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

et de la convergence de l'intégrale de droite ci-dessous établie en **3.**, on déduit :

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{\mathbf{e}^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \mathrm{W}_0 = \frac{\pi}{2},$$

avec convergence de l'intégrale centrale.

7. a. La première inégalité est évidente sachant $0 \leqslant v < 1$. Quant à la seconde, il suffit d'observer, sachant $0 \leqslant v \leqslant \frac{1}{2}$, que

$$(1+v)^2 - \frac{1}{1-v} = \frac{v}{1-v}(1 - v - v^2) \geqslant \frac{v}{1-v}\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}\right) \geqslant 0.$$

b. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on justifie comme en **4.a.** la convergence des intégrales, puis le changement de variable affine $u = 1 - t$ donne :

$$\int_0^1 \frac{\mathbf{e}^{xt}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathbf{e}^{x(1-u)}}{\sqrt{1-(1-u)^2}}\,\mathrm{d}u = \frac{\mathbf{e}^x}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{\mathbf{e}^{-xu}}{\sqrt{u}\sqrt{1-\frac{u}{2}}}\,\mathrm{d}u.$$

c. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. En appliquant l'inégalité de la question **a.** à $\frac{u}{2} \in [0, \frac{1}{2}]$ puis en utilisant la croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$, il vient :

$$\forall u \in]0,1], \quad \frac{\mathbf{e}^{-xu}}{\sqrt{u}} \leqslant \frac{\mathbf{e}^{-xu}}{\sqrt{u}} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u}{2}}} \leqslant \frac{\mathbf{e}^{-xu}}{\sqrt{u}}\Big(1+\frac{u}{2}\Big) \tag{1}$$

où le membre de droite peut encore être majoré par $\frac{1}{\sqrt{u}}\big(1+\frac{u}{2}\big)$, dont l'intégrale sur $]0,1]$ converge par opérations sur les intégrales de Riemann. Toutes les fonctions, positives, intervenant dans (1), admettent donc une intégrale convergente sur $]0,1]$ si bien, par croissance et linéarité de l'intégrale généralisée convergente, que :

$$\int_0^1 \frac{\mathbf{e}^{-xu}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \leqslant \int_0^1 \frac{\mathbf{e}^{-xu}}{\sqrt{u}\sqrt{1-\frac{u}{2}}}\,\mathrm{d}u \leqslant \int_0^1 \frac{\mathbf{e}^{-xu}}{\sqrt{u}}\Big(1+\frac{u}{2}\Big)\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{\mathbf{e}^{-xu}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u + \frac{1}{2}\int_0^1 \mathbf{e}^{-xu}\sqrt{u}\,\mathrm{d}u$$

puis, d'après **b.**, que :

$$\frac{\mathbf{e}^{x}}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{\mathbf{e}^{-xu}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \leqslant \int_0^1 \frac{\mathbf{e}^{xt}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\mathbf{e}^{x}}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{\mathbf{e}^{-xu}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u + \frac{\mathbf{e}^{x}}{2\sqrt{2}}\int_0^1 \mathbf{e}^{-xu}\sqrt{u}\,\mathrm{d}u.$$

8. a. Une variable aléatoire Z de loi $\mathcal{N}\big(0,\frac{1}{2}\big)$ admet pour densité $f_Z : t \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathbf{e}^{-t^2}$, pour espérance $\mathbb{E}(Z) = 0$ et pour variance $\mathbb{V}(Z) = \frac{1}{2}$.
On en déduit, par parité de la densité f_Z, la convergence et la valeur des intégrales

$$\int_0^{+\infty} \mathbf{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}\int_0^{+\infty} f_Z(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

et

$$\int_0^{+\infty} t^2\mathbf{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_Z(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\mathbb{E}(Z^2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\mathbb{V}(Z) = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

b. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ donné, le changement de variable $t \longmapsto u = \frac{t^2}{x}$, de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement croissant de $]0,\sqrt{x}]$ sur $]0,1]$, amène :

$$\int_0^1 \frac{\mathbf{e}^{-xu}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{\mathbf{e}^{-t^2}}{\frac{t}{\sqrt{x}}}\frac{2t}{x}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{x}}\int_0^{\sqrt{x}} \mathbf{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Puisque $\int_0^{\sqrt{x}} \mathbf{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge vers la constante non nulle $\int_0^{+\infty} \mathbf{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ d'après **a.** lorsque $x \to +\infty$, donc lui est équivalent, il en ressort que :

$$\int_0^1 \frac{\mathbf{e}^{-xu}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \sim \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}}, \quad x \to +\infty.$$

De même, on montre que :

$$\int_0^1 \mathbf{e}^{-xu}\sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \frac{2}{x\sqrt{x}}\int_0^{\sqrt{x}} t^2\mathbf{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \sim \frac{2}{x\sqrt{x}}\int_0^{+\infty} t^2\mathbf{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2x\sqrt{x}}, \quad x \to +\infty.$$

9. Le résultat de la question **8.b.** met en évidence que

$$\int_0^1 \frac{\mathbf{e}^{-xu}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u + \int_0^1 \mathbf{e}^{-xu}\sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{\mathbf{e}^{-xu}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u + o\Big(\int_0^1 \frac{\mathbf{e}^{-xu}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u\Big) \sim \int_0^1 \frac{\mathbf{e}^{-xu}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u, \quad x \to +\infty.$$

Par suite, en divisant tous les membres des inégalités établies en **7.c.** par $\frac{\mathbf{e}^{x}}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{\mathbf{e}^{-xu}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$, on montre par encadrement que :

$$\int_0^1 \frac{\mathbf{e}^{xt}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \sim \frac{\mathbf{e}^{x}}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{\mathbf{e}^{-xu}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \sim \mathbf{e}^{x}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2x}}, \quad x \to +\infty.$$

Ainsi, dans la somme

$$\mathrm{I}(x) = \int_0^1 \frac{\mathbf{e}^{xt}+\mathbf{e}^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathbf{e}^{xt}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{\mathbf{e}^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t,$$

le premier terme diverge vers $+\infty$ lorsque $x \to +\infty$ alors que le second est borné d'après **6.**. On a donc finalement :

$$\mathrm{I}(x) = \int_0^1 \frac{\mathbf{e}^{xt}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t + o\Big(\int_0^1 \frac{\mathbf{e}^{xt}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t\Big) \sim \int_0^1 \frac{\mathbf{e}^{xt}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \sim \mathbf{e}^{x}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2x}}, \quad x \to +\infty.$$

Quatrième partie

10. a. En s'appuyant sur la méthode de Monte-Carlo d'approximation d'une probabilité, on peut proposer le script ci-dessous :

Listing 1 : approximation de $\mathbb{P}(X = Y)$

```
function r=estime(lambda)
    n=10^4;  // nombre d'expériences dans la MMC
    X=grand(1,n,'poi',lambda);
    Y=grand(1,n,'poi',lambda);
    r=sum(X==Y)/n;
endfunction
```

Remarque. Le nombre n peut être ajusté en fonction de la précision dans l'approximation de la probabilité $\mathbb{P}(X = Y)$ et du niveau de confiance $1 - \alpha$ souhaités.

b. À la lumière de la sortie graphique, on conjecture que $\sqrt{\pi\lambda}\,\mathbb{P}(X = Y)$ converge vers $\frac{1}{2}$ lorsque $\lambda \to +\infty$, c'est-à-dire que

$$\mathbb{P}(X = Y) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi\lambda}}, \quad \lambda \to +\infty.$$

11. En utilisant le système complet associé à la variable Y ainsi que l'indépendance des variables X et Y, il vient :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = Y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y = k)\,\mathbb{P}_{[Y=k]}(X = Y) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y = k)\,\mathbb{P}_{[Y=k]}(X = k)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y = k)\,\mathbb{P}(X = k) = \mathbf{e}^{-2\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(k!)^2}.\end{aligned}$$

12. a. D'après **11.** et **5.c.**,

$$\mathbb{P}(X = Y) = \mathbf{e}^{-2\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2\lambda)^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} = \frac{\mathbf{e}^{-2\lambda}}{\pi} I(2\lambda).$$

b. D'après **a.** et **9.**,

$$\mathbb{P}(X = Y) \sim \frac{1}{\pi}\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi\lambda}}, \quad \lambda \to +\infty,$$

en accord avec la conjecture formulée en **10.b.**.

Deuxième problème

Première partie

1. a. L'application φ est linéaire (de E dans $\mathbb{R}[X]$) par linéarité de la dérivation : pour $P, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P + Q) &= \frac{1}{n}X(1 - X)(\lambda P' + Q') + X(\lambda P + Q)\\ &= \lambda\Big(\frac{1}{n}X(1 - X)P' + XP\Big) + \frac{1}{n}X(1 - X)Q' + XQ = \lambda\varphi(P) + \varphi(Q).\end{aligned}$$

b. On calcule plus généralement, pour $k \in [\![0, n]\!]$ (avec les réserves [1] habituelles pour $k = 0$),

$$\varphi(X^k) = \frac{k}{n}X(1 - X)X^{k-1} + X^{k+1} = \frac{k}{n}X^k + \Big(1 - \frac{k}{n}\Big)X^{k+1}.$$

On remarque en particulier que $\varphi(X^n) = X^n$.

c. Il apparaît sur le résultat obtenu en **b.** que $\varphi(X^k) \in E$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, si bien que φ est à valeurs dans E par linéarité : c'est donc un endomorphisme de E d'après **a.**.

1. On introduit un terme a priori non polynomial, mais il est affecté d'un facteur nul, et cela n'a donc pas d'incidence.

2. D'après **1.b.**, φ est représenté en base canonique par la matrice triangulaire inférieure

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{n} & 0 & & \vdots & \vdots \\ 0 & \frac{n-1}{n} & \frac{2}{n} & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \frac{n-2}{n} & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \frac{n-1}{n} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{n} & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n+1}(\mathbb{R}),$$

de coefficient générique

$$a_{i,j} = \begin{cases} \frac{i}{n} & \text{si } i = j \\ 1 - \frac{i}{n} & \text{si } i = j+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad 0 \leqslant i, j \leqslant n.$$

3. a. L'un des coefficiens diagonaux de la matrice triangulaire A étant nul, celle-ci n'est pas inversible et φ n'est donc pas bijectif. Comme il s'agit d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, il n'est donc pas injectif.

b. Par hypothèse, on a $\frac{1}{n}\mathrm{X}(1-\mathrm{X})\mathrm{P}' + \mathrm{XP} = 0$ c'est-à-dire $n\mathrm{P} = (\mathrm{X}-1)\mathrm{P}'$ dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$. Par suite, 1 est racine de P. Si $z \in \mathbb{C}$ désigne une autre racine de P et $\nu \geqslant 1$ sa multiplicité, alors $\mathrm{P}^{(\nu-1)}(z) = 0$ et $\mathrm{P}^{(\nu)}(z) \neq 0$. Cependant, en dérivant la relation $n\mathrm{P} = (\mathrm{X}-1)\mathrm{P}'$ à l'ordre $\nu - 1$, il vient :

$$n\mathrm{P}^{(\nu-1)} = \sum_{k=0}^{\nu-1} \binom{\nu-1}{k} (\mathrm{X}-1)^{(k)}(\mathrm{P}')^{(\nu-1-k)} = (\mathrm{X}-1)\mathrm{P}^{(\nu)} + (\nu-1)\mathrm{P}^{(\nu-1)},$$

et l'on obtient une contradiction avec ce qui précède en évaluant en $z \neq 1$. Ainsi 1 est la seule racine complexe de P.

Par ailleurs, si d désigne le degré de P et $a_d \neq 0$ son coefficient dominant alors, en écrivant l'égalité des coefficients de degré d dans la relation $n\mathrm{P} = (\mathrm{X}-1)\mathrm{P}'$, on obtient $na_d = da_d$ et finalement $d = n$: le polynôme P est nécessairement de degré n.

Remarque. On peut obtenir plus rapidement ces deux résultats en raisonnant sur la multiplicité ν de 1 comme racine de P : en introduisant $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{P} = (\mathrm{X}-1)^\nu \mathrm{Q}$ et $\mathrm{Q}(1) \neq 0$ puis en évaluant en 1 la relation $n\mathrm{P} = (\mathrm{X}-1)\mathrm{P}'$ après l'avoir explicitée et simplifiée par $(\mathrm{X}-1)^\nu \neq 0$, on obtient $(n-\nu)\mathrm{Q}(1) = 0$ d'où $\nu = n$. Ou encore en utilisant des considérations arithmétiques, pas tellement dans l'esprit du programme...

c. D'après la question **b.** et le théorème de d'Alembert-Gauss, les seuls éléments non nuls éventuels du noyau sont les polynômes de la forme $\lambda(\mathrm{X}-1)^n$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Puisque $\operatorname{Ker}\varphi$ n'est pas nul d'après **a.**, il est donc engendré par le polynôme non nul $(\mathrm{X}-1)^n$, qui en forme une base.

Remarque. Les questions qui suivent donneront un nouvel argument pour le calcul de $\operatorname{Ker}\varphi$.

4. Les valeurs propres de la matrice triangulaire A sont ses coefficients diagonaux : $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1$. Ainsi cette matrice carrée d'ordre $n+1$ admet-elle $n+1$ valeurs propres distinctes. Elle est donc diagonalisable, et il en va de même de φ.

5. a. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, le calcul donne $\mathrm{P}_k' = (k - n\mathrm{X})\mathrm{X}^{k-1}(1-\mathrm{X})^{n-k-1}$ puis

$$\varphi(\mathrm{P}_k) = \Big(\frac{k}{n} - \mathrm{X}\Big)\mathrm{X}^k(1-\mathrm{X})^{n-k} + \mathrm{XP}_k = \frac{k}{n}\mathrm{P}_k.$$

Le vecteur P_k non nul de E est donc propre pour φ, associé à la valeur propre $\frac{k}{n}$.

b. La famille $(\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n)$, formée de vecteurs propres pour φ associées à des valeurs propres deux-à-deux distinctes, est libre. Composée de $n+1 = \dim \mathrm{E}$ vecteurs, c'est donc une base de E.

D'après **a.**, l'endomorphisme φ y est représenté par la matrice diagonale $\operatorname{diag}\big(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\big)$.

c. L'endomorphisme φ admettant $n+1$ valeurs propres distintes d'après **4.** dans un espace de dimension $n+1$, ses sous-espaces propres sont des droites. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, le sous-espace propre associé à la valeur propre $\frac{k}{n}$ est donc la droite dirigée par le vecteur P_k d'après **a.**.

Deuxième partie

6. a. La variable Z_2 prenant ses valeurs dans $\{0,1\}$, elle suit une loi de Bernoulli, dont il s'agit de déterminer le paramètre $\mathbb{P}(Z_2 = 1)$. Vu le détail des questions suivantes, l'énoncé semble inviter à raisonner en considérant qu'il s'agit de la probabilité de tirer l'une des $n-1$ autres boules que *celle* qui a été obtenue au premier tirage et à donner directement sa valeur $\mathbb{P}(Z_2 = 1) = \frac{n-1}{n}$. Néanmoins, le raisonnement précédent n'est pas complètement satisfaisant, car le choix de la boule déjà tirée est aléatoire. Il conviendrait donc mieux, pour envisager l'ensemble des situations possibles, d'avoir recours à la formule des probabilités totales appliquée au système complet associé à la variable T_1 donnant le numéro sortant au premier tirage :

$$\mathbb{P}(Z_2 = 1) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(T_1 = i)\, \mathbb{P}_{[T_1=i]}(Z_2 = 1) = \frac{n-1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(T_1 = i) = 1 - \frac{1}{n}.$$

En effet, conditionnellement à l'événement $[T_1 = i]$ pour un entier i donné, l'événement $[Z_2 = 1]$ se réalise si, et seulement si, on obtient une autre boule que la i-ième au deuxième tirage.

b. Pour $j \in [\![1,k]\!]$ donné, on suppose $\mathbb{P}(Y_k = j) > 0$, sans quoi la question intermédiaire n'a pas de sens. Conditionnellement à l'événement $[Y_k = j]$, l'événement $[Z_{k+1} = 1]$ se réalise si, et seulement si, le $k+1$-ième tirage amène l'une des $n-j$ boules qui n'ont pas déjà été tirées. Avec les mêmes réserves qu'en **a.**, on a donc $\mathbb{P}_{[Y_k=j]}(Z_{k+1} = 1) = \frac{n-j}{n} = 1 - \frac{j}{n}$.
En utilisant la formule des probabilités totales appliquée au système complet associé à la variable Y_k, on obtient alors :

$$\mathbb{P}(Z_{k+1} = 1) = \sum_{j \in Y_k(\Omega)} \mathbb{P}(Y_k = j)\, \mathbb{P}_{[Y_k=j]}(Z_{k+1} = 1) = \sum_{j=1}^{k} \Big(1 - \frac{j}{n}\Big) \mathbb{P}(Y_k = j)$$
$$= \sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}(Y_k = j) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{k} j\, \mathbb{P}(Y_k = j) = 1 - \frac{1}{n}\, \mathbb{E}(Y_k)$$

car $Y_k(\Omega) \subset [\![1,k]\!]$.

c. Partant de la relation obtenue en **b.** et de $Y_k = \sum_{j=1}^{k} Z_j$ où les variables $Z_1, \dots, Z_k$ suivent des lois de Bernoulli, il vient par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{P}(Z_{k+1} = 1) = 1 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{k} \mathbb{E}(Z_j) = 1 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}(Z_j = 1).$$

d. On vérifie le résultat par récurrence forte sur k à partir de la relation obtenue en **c.** : il est immédiat au rang $k = 1$ puisque $Z_1 = 1$ puis, s'il est acquis jusqu'à un rang $k \geqslant 1$, alors

$$\mathbb{P}(Z_{k+1} = 1) = 1 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{k} \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)^{j-1} = 1 - \frac{1}{n} \frac{1 - \big(1 - \frac{1}{n}\big)^k}{1 - \big(1 - \frac{1}{n}\big)} = \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)^k$$

par sommation géométrique.

e. D'après **c.** et **d.**,

$$\mathbb{E}(Y_k) = \sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}(Z_j = 1) = \sum_{j=1}^{k} \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)^{j-1} = n\Big(1 - \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)^k\Big).$$

7. a. À partir de $Y_0 = 0$, $Y_1 = 1$ et $Y_2 = 1 + Z_2$ où Z_2 suit la loi de Bernoulli de paramètre $1 - \frac{1}{n}$ d'après **6.a.**, on obtient $G_0 = 1$, $G_1 = X$ et $G_2 = \frac{1}{n}X + \big(1 - \frac{1}{n}\big)X^2$.

b. Pour $k \in \mathbb{N}$, $Y_{k+1} = Y_k + Z_{k+1}$ où Z_{k+1} prend ses valeurs dans $\{0,1\}$ si bien, d'après **6.b.**, que pour $i \in [\![0,n]\!]$:

$$\mathbb{P}(Y_{k+1} = i) = \sum_{j=0}^{1} \mathbb{P}(Y_k = i-j, Z_{k+1} = j) = \sum_{\substack{j \in \{0,1\} : \\ \mathbb{P}(Y_k = i-j) > 0}} \mathbb{P}(Y_k = i-j)\, \mathbb{P}_{[Y_k=i-j]}(Z_{k+1} = j)$$
$$= \frac{i}{n}\, \mathbb{P}(Y_k = i) + \Big(1 - \frac{i-1}{n}\Big) \mathbb{P}(Y_k = i-1).$$

c. Pour $k \in \mathbb{N}$, il vient d'après **b.**,

$$\begin{aligned}
G_{k+1} &= \sum_{i=0}^{n} \frac{i}{n}\,\mathbb{P}(Y_k = i)X^i + \sum_{i=1}^{n+1}\Big(1 - \frac{i-1}{n}\Big)\,\mathbb{P}(Y_k = i-1)X^i \\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{i}{n}\,\mathbb{P}(Y_k = i)X^i + \sum_{i=0}^{n}\Big(1 - \frac{i}{n}\Big)\,\mathbb{P}(Y_k = i)X^{i+1} \\
&= \frac{1}{n}(X - X^2)\sum_{i=0}^{n} i\,\mathbb{P}(Y_k = i)X^{i-1} + X\sum_{i=0}^{n}\mathbb{P}(Y_k = i)X^i \\
&= \frac{1}{n}X(1-X)G_k' + XG_k.
\end{aligned}$$

d. D'après **c.**, $G_{k+1} = \varphi(G_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, d'où l'on déduit par récurrence immédiate que $G_k = \varphi^k(G_0)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

8. a. Sachant la variable Y_k à valeurs dans $[\![0, n]\!]$, on a :

$$G_k(1) = \sum_{i=0}^{n}\mathbb{P}(Y_k = i) = 1 \text{ et } \quad G_k'(1) = \sum_{i=0}^{n} i\,\mathbb{P}(Y_k = i) = \mathbb{E}(Y_k).$$

b. En dérivant la relation établie en **7.c.**, on obtient pour $k \in \mathbb{N}$:

$$G_{k+1}' = \frac{1}{n}X(1-X)G_k'' + \frac{1}{n}\big(1 + (n-2)X\big)G_k' + G_k$$

puis, en évaluant en 1, d'après **a.** :

$$\mathbb{E}(Y_{k+1}) = G_{k+1}'(1) = \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)G_k'(1) + G_k(1) = \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\,\mathbb{E}(Y_k) + 1.$$

c. La formule de la question **b.** est une relation de récurrence arithmético-géométrique pour la suite $\big(\mathbb{E}(Y_k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$. Dans ces conditions, la suite de terme général $\mathbb{E}(Y_k) - n$, $k \in \mathbb{N}$, est géométrique de raison $1 - \frac{1}{n}$, ce qui conduit à l'expression :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}(Y_k) = n + \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)^k\big(\mathbb{E}(Y_0) - n\big) = n\Big(1 - \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)^k\Big).$$

9. a. Par application directe de la formule du binôme, il vient :

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}P_j = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}X^j(1-X)^{n-j} = \big(X + (1-X)\big)^n = 1.$$

b. Pour $j \in [\![0, n]\!]$, la même formule du binôme donne :

$$P_j = X^j\sum_{k=0}^{n-j}\binom{n-j}{k}(-X)^k = \sum_{k=0}^{n-j}\binom{n-j}{k}(-1)^kX^{k+j} = \sum_{i=j}^{n}\binom{n-j}{i-j}(-1)^{i-j}X^i$$

par changement d'indice $i = k + j$.

c. D'après **5.a.**, **7.a.**, **a.** et **b.**,

$$\begin{aligned}
\varphi^k(G_0) &= \varphi^k\Big(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}P_j\Big) = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\varphi^k(P_j) = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\Big(\frac{j}{n}\Big)^kP_j \\
&= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\Big(\frac{j}{n}\Big)^k\sum_{i=j}^{n}\binom{n-j}{i-j}(-1)^{i-j}X^i = \sum_{i=0}^{n}\Big(\sum_{j=0}^{i}\binom{n}{j}\binom{n-j}{i-j}\Big(\frac{j}{n}\Big)^k(-1)^{i-j}\Big)X^i.
\end{aligned}$$

d. Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après **7.d.** et **c.**,

$$\sum_{i=0}^{n}\mathbb{P}(Y_k = i)X^i = G_k = \varphi^k(G_0) = \sum_{i=0}^{n}\Big(\sum_{j=0}^{i}\binom{n}{j}\binom{n-j}{i-j}\Big(\frac{j}{n}\Big)^k(-1)^{i-j}\Big)X^i$$

d'où, par identification :

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad \mathbb{P}(Y_k = i) = \sum_{j=0}^{i}\binom{n}{j}\binom{n-j}{i-j}\Big(\frac{j}{n}\Big)^k(-1)^{i-j}.$$

Pour finir, il reste à remarquer que pour tous $i, j \in [\![0, n]\!]$ tels que $j \leqslant i$,

$$\binom{n}{j}\binom{n-j}{i-j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}\frac{(n-j)!}{(i-j)!(n-i)!} = \frac{n!}{i!(n-i)!}\frac{i!}{j!(i-j)!} = \binom{n}{i}\binom{i}{j}$$

pour conclure :

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad \mathbb{P}(Y_k = i) = \binom{n}{i}\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}(-1)^{i-j}\left(\frac{j}{n}\right)^k.$$