

EMLYON 2018 S

Éléments de correction

Premier problème

Première partie

1. Il vient immédiatement :

$$W_0 = \int_0^{\pi/2} du = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad W_1 = \int_0^{\pi/2} \sin u \, du = 1.$$

2. a. Par intégration par parties,

$$\begin{aligned} W_k - W_{k+2} &= \int_0^{\pi/2} \sin^k u (1 - \sin^2 u) \, du = \int_0^{\pi/2} (\sin^k u \cos u) \cos u \, du \\ &= \left[\frac{\sin^{k+1} u}{k+1} \cos u \right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{k+1} u}{k+1} \sin u \, du = \frac{1}{k+1} W_{k+2}. \end{aligned}$$

b. De la question a., on déduit la relation de récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad W_{k+2} = \frac{k+1}{k+2} W_k,$$

qui permet d'établir la formule

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad W_{2k} = \frac{(2k)!}{2^{2k} (k!)^2} \frac{\pi}{2}$$

par récurrence sur k . Elle est en effet immédiate au rang $k = 0$ d'après 1. et, si elle est acquise à un rang $k \in \mathbb{N}$, alors

$$W_{2(k+1)} = W_{2k+2} = \frac{2k+1}{2k+2} W_{2k} = \frac{2k+2}{2(k+1)} \frac{2k+1}{2(k+1)} \frac{(2k)!}{2^{2k} (k!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2(k+1))!}{2^{2(k+1)} ((k+1)!)^2} \frac{\pi}{2}.$$

Deuxième partie

3. Pour $k \in \mathbb{N}$ donné, la fonction $t \mapsto \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $[0, 1[$. Le changement de variable $u \mapsto t = \sin u$, de classe \mathcal{C}^1 et strictement croissant de $[0, \frac{\pi}{2}[$ sur $[0, 1[$, préserve la nature et la valeur de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^k u}{\sqrt{1-\sin^2 u}} \cos u \, du = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^k u}{\sqrt{\cos^2 u}} \cos u \, du = W_k$$

(où $\cos u \geq 0$ pour tout $u \in [0, \frac{\pi}{2}]$). L'intégrale est donc convergente puisque la fonction $u \mapsto \sin^k u$ est continue sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$.

4. a. Pour $x \in \mathbb{R}$ donné, la fonction $f_x : t \mapsto \frac{e^{xt} + e^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $[0, 1[$ avec, lorsque $x \geq 0$:

$$\forall t \in [0, 1[, \quad 0 \leq f_x(t) \leq \frac{e^x + 1}{\sqrt{1-t^2}},$$

si bien que l'intégrale $I(x) = \int_0^1 f_x(t) dt$ converge par comparaison à l'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, convergente d'après 3..

Pour $x \leq 0$, on a $f_x = f_{-x}$ où $-x \geq 0$, de sorte que l'intégrale $I(x) = \int_0^1 f_x(t) dt$ converge comme on vient de le voir, et vaut $I(x) = I(-x)$.

Ainsi la fonction I est-elle bien définie sur \mathbb{R} et paire.

b. D'après 1. et 3.,

$$I(0) = 2 \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = 2W_0 = \pi.$$

www.rb1d.fr

5. a. La fonction $g : u \mapsto e^u + e^{-u}$ est de classe \mathcal{C}^{2n+1} sur \mathbb{R} avec :

$$\forall k \in \llbracket 0, 2n + 1 \rrbracket, \quad \forall u \in \mathbb{R}, \quad g^{(k)}(u) = e^u + (-1)^k e^{-u}.$$

En particulier, puisque $xt \geq 0$ par hypothèse,

$$\forall u \in [0, xt], \quad |g^{(2n+1)}(u)| = e^u - e^{-u} \leq e^u \leq e^{xt} = M,$$

où M est un majorant indépendant de u .

On se trouve donc dans les conditions d'application de l'inégalité de Taylor-Lagrange :

$$\left| g(xt) - \sum_{k=0}^{2n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} (xt)^k \right| \leq \frac{|xt|^{2n+1}}{(2n+1)!} M$$

c'est-à-dire, grâce à un changement d'indice après avoir observé que $g^{(k)}(0)$ est nul lorsque k est impair et vaut 2 lorsque k est pair :

$$\left| e^{xt} + e^{-xt} - 2 \sum_{k=0}^n \frac{(xt)^{2k}}{(2k)!} \right| \leq \frac{(xt)^{2n+1}}{(2n+1)!} e^{xt} \leq \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} e^x$$

car $x \geq 0$ et $t \leq 1$ par hypothèse.

b. Pour $n \in \mathbb{N}$ donné, il vient d'après 3. et a. :

$$\begin{aligned} \left| I(x) - 2 \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} W_{2k} \right| &= \left| \int_0^1 \left(e^{xt} + e^{-xt} - 2 \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} t^{2k} \right) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \right| \\ &\leq \int_0^1 \left| e^{xt} + e^{-xt} - 2 \sum_{k=0}^n \frac{(xt)^{2k}}{(2k)!} \right| \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ &\leq \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} e^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{2} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} e^x. \end{aligned}$$

c. Puisque le membre de droite dans l'inégalité de la question b. converge vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$ (car $\frac{x^n}{n!}$ tend vers 0 comme terme général d'une série exponentielle convergente), il en ressort par encadrement que la série

$$\frac{2}{\pi} \sum_{k \geq 0} \frac{x^{2k}}{(2k)!} W_{2k} = \sum_{k \geq 0} \frac{x^{2k}}{2^{2k} (k!)^2}$$

converge, avec :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2^{2k} (k!)^2} = \frac{1}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} W_{2k} = \frac{1}{\pi} I(x).$$

Troisième partie

6. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. De l'inégalité immédiate

$$\forall t \in [0, 1[, \quad 0 \leq \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

et de la convergence de l'intégrale de droite ci-dessous établie en 3., on déduit :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}} dt \leq \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = W_0 = \frac{\pi}{2},$$

avec convergence de l'intégrale centrale.

7. a. La première inégalité est évidente sachant $0 \leq v < 1$. Quant à la seconde, il suffit d'observer, sachant $0 \leq v \leq \frac{1}{2}$, que

$$(1+v)^2 - \frac{1}{1-v} = \frac{v}{1-v} (1-v-v^2) \geq \frac{v}{1-v} \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} \right) \geq 0.$$

b. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on justifie comme en 4.a. la convergence des intégrales, puis le changement de variable affine $u = 1 - t$ donne :

$$\int_0^1 \frac{e^{xt}}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^1 \frac{e^{x(1-u)}}{\sqrt{1-(1-u)^2}} du = \frac{e^x}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}\sqrt{1-\frac{u}{2}}} du.$$

c. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. En appliquant l'inégalité de la question a. à $\frac{u}{2} \in [0, \frac{1}{2}]$ puis en utilisant la croissance de la fonction racine carrée sur \mathbb{R}_+ , il vient :

$$\forall u \in]0, 1], \quad \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}} \leq \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u}{2}}} \leq \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}} \left(1 + \frac{u}{2}\right) \tag{1}$$

où le membre de droite peut encore être majoré par $\frac{1}{\sqrt{u}}(1 + \frac{u}{2})$, dont l'intégrale sur $]0, 1]$ converge par opérations sur les intégrales de Riemann. Toutes les fonctions, positives, intervenant dans (1), admettent donc une intégrale convergente sur $]0, 1]$ si bien, par croissance et linéarité de l'intégrale généralisée convergente, que :

$$\int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}} du \leq \int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}\sqrt{1-\frac{u}{2}}} du \leq \int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}} \left(1 + \frac{u}{2}\right) du = \int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}} du + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-xu} \sqrt{u} du$$

puis, d'après b., que :

$$\frac{e^x}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}} du \leq \int_0^1 \frac{e^{xt}}{\sqrt{1-t^2}} dt \leq \frac{e^x}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}} du + \frac{e^x}{2\sqrt{2}} \int_0^1 e^{-xu} \sqrt{u} du.$$

8. a. Une variable aléatoire Z de loi $\mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$ admet pour densité $f_Z : t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}$, pour espérance $\mathbb{E}(Z) = 0$ et pour variance $\mathbb{V}(Z) = \frac{1}{2}$.

On en déduit, par parité de la densité f_Z , la convergence et la valeur des intégrales

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi} \int_0^{+\infty} f_Z(t) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(t) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

et

$$\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_Z(t) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \mathbb{E}(Z^2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \mathbb{V}(Z) = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

b. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ donné, le changement de variable $t \mapsto u = \frac{t^2}{x}$, de classe \mathcal{C}^1 et strictement croissant de $]0, \sqrt{x}]$ sur $]0, 1]$, amène :

$$\int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}} du = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{e^{-t^2}}{\frac{t}{\sqrt{x}}} \frac{2t}{x} dt = \frac{2}{\sqrt{x}} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2} dt.$$

Puisque $\int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2} dt$ converge vers la constante non nulle $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ d'après a. lorsque $x \rightarrow +\infty$, donc lui est équivalent, il en ressort que :

$$\int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}} du \sim \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}}, \quad x \rightarrow +\infty.$$

De même, on montre que :

$$\int_0^1 e^{-xu} \sqrt{u} du = \frac{2}{x\sqrt{x}} \int_0^{\sqrt{x}} t^2 e^{-t^2} dt \sim \frac{2}{x\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2x\sqrt{x}}, \quad x \rightarrow +\infty.$$

9. Le résultat de la question 8.b. met en évidence que

$$\int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}} du + \int_0^1 e^{-xu} \sqrt{u} du = \int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}} du + o\left(\int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}} du\right) \sim \int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}} du, \quad x \rightarrow +\infty.$$

Par suite, en divisant tous les membres des inégalités établies en 7.c. par $\frac{e^x}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}} du$, on montre par encadrement que :

$$\int_0^1 \frac{e^{xt}}{\sqrt{1-t^2}} dt \sim \frac{e^x}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{e^{-xu}}{\sqrt{u}} du \sim e^x \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2x}}, \quad x \rightarrow +\infty.$$

Ainsi, dans la somme

$$I(x) = \int_0^1 \frac{e^{xt} + e^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^1 \frac{e^{xt}}{\sqrt{1-t^2}} dt + \int_0^1 \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1-t^2}} dt,$$

le premier terme diverge vers $+\infty$ lorsque $x \rightarrow +\infty$ alors que le second est borné d'après 6.. On a donc finalement :

$$I(x) = \int_0^1 \frac{e^{xt}}{\sqrt{1-t^2}} dt + o\left(\int_0^1 \frac{e^{xt}}{\sqrt{1-t^2}} dt\right) \sim \int_0^1 \frac{e^{xt}}{\sqrt{1-t^2}} dt \sim e^x \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2x}}, \quad x \rightarrow +\infty.$$

Quatrième partie

10. a. En s'appuyant sur la méthode de Monte-Carlo d'approximation d'une probabilité, on peut proposer le script ci-dessous :

Listing 1 : approximation de $\mathbb{P}(X = Y)$

```

fonction r=estime(lambda)
  n=10^4; // nombre d'expériences dans la MMC
  X=grand(1,n,'poi',lambda);
  Y=grand(1,n,'poi',lambda);
  r=sum(X==Y)/n;
endfonction

```

Remarque. Le nombre n peut être ajusté en fonction de la précision dans l'approximation de la probabilité $\mathbb{P}(X = Y)$ et du niveau de confiance $1 - \alpha$ souhaités.

- b. À la lumière de la sortie graphique, on conjecture que $\sqrt{\pi\lambda}\mathbb{P}(X = Y)$ converge vers $\frac{1}{2}$ lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$, c'est-à-dire que

$$\mathbb{P}(X = Y) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi\lambda}}, \quad \lambda \rightarrow +\infty.$$

11. En utilisant le système complet associé à la variable Y ainsi que l'indépendance des variables X et Y , il vient :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = Y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y = k) \mathbb{P}_{[Y=k]}(X = Y) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y = k) \mathbb{P}_{[Y=k]}(X = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y = k) \mathbb{P}(X = k) = e^{-2\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(k!)^2}. \end{aligned}$$

12. a. D'après 11. et 5.c.,

$$\mathbb{P}(X = Y) = e^{-2\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2\lambda)^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} = \frac{e^{-2\lambda}}{\pi} I(2\lambda).$$

- b. D'après a. et 9.,

$$\mathbb{P}(X = Y) \sim \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi\lambda}}, \quad \lambda \rightarrow +\infty,$$

en accord avec la conjecture formulée en 10.b..

Deuxième problème

Première partie

1. a. L'application φ est linéaire (de E dans $\mathbb{R}[X]$) par linéarité de la dérivation : pour $P, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda P + Q) &= \frac{1}{n} X(1-X)(\lambda P' + Q') + X(\lambda P + Q) \\ &= \lambda \left(\frac{1}{n} X(1-X)P' + XP \right) + \frac{1}{n} X(1-X)Q' + XQ = \lambda\varphi(P) + \varphi(Q). \end{aligned}$$

- b. On calcule plus généralement, pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ (avec les réserves¹ habituelles pour $k = 0$),

$$\varphi(X^k) = \frac{k}{n} X(1-X)X^{k-1} + X^{k+1} = \frac{k}{n} X^k + \left(1 - \frac{k}{n}\right) X^{k+1}.$$

On remarque en particulier que $\varphi(X^n) = X^n$.

- c. Il apparaît sur le résultat obtenu en b. que $\varphi(X^k) \in E$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, si bien que φ est à valeurs dans E par linéarité : c'est donc un endomorphisme de E d'après a..

1. On introduit un terme a priori non polynomial, mais il est affecté d'un facteur nul, et cela n'a donc pas d'incidence.

2. D'après **1.b.**, φ est représenté en base canonique par la matrice triangulaire inférieure

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{n} & 0 & & \vdots & \vdots \\ 0 & \frac{n-1}{n} & \frac{2}{n} & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \frac{n-2}{n} & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \frac{n-1}{n} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{n} & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n+1}(\mathbb{R}),$$

de coefficient générique

$$a_{i,j} = \begin{cases} \frac{i}{n} & \text{si } i = j \\ 1 - \frac{i}{n} & \text{si } i = j + 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad 0 \leq i, j \leq n.$$

3. **a.** L'un des coefficients diagonaux de la matrice triangulaire A étant nul, celle-ci n'est pas inversible et φ n'est donc pas bijectif. Comme il s'agit d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, il n'est donc pas injectif.

b. Par hypothèse, on a $\frac{1}{n}X(1 - X)P' + XP = 0$ c'est-à-dire $nP = (X - 1)P'$ dans $\mathbb{R}[X]$. Par suite, 1 est racine de P. Si $z \in \mathbb{C}$ désigne une autre racine de P et $\nu \geq 1$ sa multiplicité, alors $P^{(\nu-1)}(z) = 0$ et $P^{(\nu)}(z) \neq 0$. Cependant, en dérivant la relation $nP = (X - 1)P'$ à l'ordre $\nu - 1$, il vient :

$$nP^{(\nu-1)} = \sum_{k=0}^{\nu-1} \binom{\nu-1}{k} (X-1)^{(k)} (P')^{(\nu-1-k)} = (X-1)P^{(\nu)} + (\nu-1)P^{(\nu-1)},$$

et l'on obtient une contradiction avec ce qui précède en évaluant en $z \neq 1$. Ainsi 1 est la seule racine complexe de P.

Par ailleurs, si d désigne le degré de P et $a_d \neq 0$ son coefficient dominant alors, en écrivant l'égalité des coefficients de degré d dans la relation $nP = (X - 1)P'$, on obtient $na_d = da_d$ et finalement $d = n$: le polynôme P est nécessairement de degré n .

Remarque. On peut obtenir plus rapidement ces deux résultats en raisonnant sur la multiplicité ν de 1 comme racine de P : en introduisant $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = (X - 1)^\nu Q$ et $Q(1) \neq 0$ puis en évaluant en 1 la relation $nP = (X - 1)P'$ après l'avoir explicitée et simplifiée par $(X - 1)^\nu \neq 0$, on obtient $(n - \nu)Q(1) = 0$ d'où $\nu = n$. Ou encore en utilisant des considérations arithmétiques, pas tellement dans l'esprit du programme...

c. D'après la question **b.** et le théorème de d'Alembert-Gauss, les seuls éléments non nuls éventuels du noyau sont les polynômes de la forme $\lambda(X - 1)^n$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Puisque $\text{Ker } \varphi$ n'est pas nul d'après **a.**, il est donc engendré par le polynôme non nul $(X - 1)^n$, qui en forme une base.

Remarque. Les questions qui suivent donneront un nouvel argument pour le calcul de $\text{Ker } \varphi$.

4. Les valeurs propres de la matrice triangulaire A sont ses coefficients diagonaux : $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1$. Ainsi cette matrice carrée d'ordre $n+1$ admet-elle $n+1$ valeurs propres distinctes. Elle est donc diagonalisable, et il en va de même de φ .

5. **a.** Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, le calcul donne $P'_k = (k - nX)X^{k-1}(1 - X)^{n-k-1}$ puis

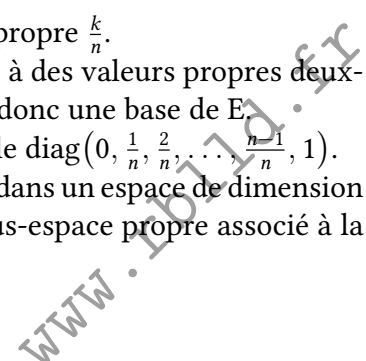
$$\varphi(P_k) = \left(\frac{k}{n} - X\right)X^k(1 - X)^{n-k} + XP_k = \frac{k}{n}P_k.$$

Le vecteur P_k non nul de E est donc propre pour φ , associé à la valeur propre $\frac{k}{n}$.

b. La famille (P_0, P_1, \dots, P_n) , formée de vecteurs propres pour φ associées à des valeurs propres deux-à-deux distinctes, est libre. Composée de $n + 1 = \dim E$ vecteurs, c'est donc une base de E.

D'après **a.**, l'endomorphisme φ y est représenté par la matrice diagonale $\text{diag}(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1)$.

c. L'endomorphisme φ admettant $n+1$ valeurs propres distinctes d'après **4.** dans un espace de dimension $n + 1$, ses sous-espaces propres sont des droites. Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, le sous-espace propre associé à la valeur propre $\frac{k}{n}$ est donc la droite dirigée par le vecteur P_k d'après **a.**



Deuxième partie

- 6. a.** La variable Z_2 prenant ses valeurs dans $\{0, 1\}$, elle suit une loi de Bernoulli, dont il s'agit de déterminer le paramètre $\mathbb{P}(Z_2 = 1)$. Vu le détail des questions suivantes, l'énoncé semble inviter à raisonner en considérant qu'il s'agit de la probabilité de tirer l'une des $n - 1$ autres boules que celle qui a été obtenue au premier tirage et à donner directement sa valeur $\mathbb{P}(Z_2 = 1) = \frac{n-1}{n}$. Néanmoins, le raisonnement précédent n'est pas complètement satisfaisant, car le choix de la boule déjà tirée est aléatoire. Il conviendrait donc mieux, pour envisager l'ensemble des situations possibles, d'avoir recours à la formule des probabilités totales appliquée au système complet associé à la variable T_1 donnant le numéro sortant au premier tirage :

$$\mathbb{P}(Z_2 = 1) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(T_1 = i) \mathbb{P}_{[T_1=i]}(Z_2 = 1) = \frac{n-1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(T_1 = i) = 1 - \frac{1}{n}.$$

En effet, conditionnellement à l'événement $[T_1 = i]$ pour un entier i donné, l'événement $[Z_2 = 1]$ se réalise si, et seulement si, on obtient une autre boule que la i -ième au deuxième tirage.

- b.** Pour $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$ donné, on suppose $\mathbb{P}(Y_k = j) > 0$, sans quoi la question intermédiaire n'a pas de sens. Conditionnellement à l'événement $[Y_k = j]$, l'événement $[Z_{k+1} = 1]$ se réalise si, et seulement si, le $k + 1$ -ième tirage amène l'une des $n - j$ boules qui n'ont pas déjà été tirées. Avec les mêmes réserves qu'en **a.**, on a donc $\mathbb{P}_{[Y_k=j]}(Z_{k+1} = 1) = \frac{n-j}{n} = 1 - \frac{j}{n}$.

En utilisant la formule des probabilités totales appliquée au système complet associé à la variable Y_k , on obtient alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_{k+1} = 1) &= \sum_{j \in Y_k(\Omega)} \mathbb{P}(Y_k = j) \mathbb{P}_{[Y_k=j]}(Z_{k+1} = 1) = \sum_{j=1}^k \left(1 - \frac{j}{n}\right) \mathbb{P}(Y_k = j) \\ &= \sum_{j=1}^k \mathbb{P}(Y_k = j) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k j \mathbb{P}(Y_k = j) = 1 - \frac{1}{n} \mathbb{E}(Y_k) \end{aligned}$$

car $Y_k(\Omega) \subset \llbracket 1, k \rrbracket$.

- c.** Partant de la relation obtenue en **b.** et de $Y_k = \sum_{j=1}^k Z_j$ où les variables Z_1, \dots, Z_k suivent des lois de Bernoulli, il vient par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{P}(Z_{k+1} = 1) = 1 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k \mathbb{E}(Z_j) = 1 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k \mathbb{P}(Z_j = 1).$$

- d.** On vérifie le résultat par récurrence forte sur k à partir de la relation obtenue en **c.** : il est immédiat au rang $k = 1$ puisque $Z_1 = 1$ puis, s'il est acquis jusqu'à un rang $k \geq 1$, alors

$$\mathbb{P}(Z_{k+1} = 1) = 1 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{j-1} = 1 - \frac{1}{n} \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k}{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k$$

par sommation géométrique.

- e.** D'après **c.** et **d.**,

$$\mathbb{E}(Y_k) = \sum_{j=1}^k \mathbb{P}(Z_j = 1) = \sum_{j=1}^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{j-1} = n \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k\right).$$

- 7. a.** À partir de $Y_0 = 0, Y_1 = 1$ et $Y_2 = 1 + Z_2$ où Z_2 suit la loi de Bernoulli de paramètre $1 - \frac{1}{n}$ d'après **6.a.**, on obtient $G_0 = 1, G_1 = X$ et $G_2 = \frac{1}{n}X + \left(1 - \frac{1}{n}\right)X^2$.

- b.** Pour $k \in \mathbb{N}, Y_{k+1} = Y_k + Z_{k+1}$ où Z_{k+1} prend ses valeurs dans $\{0, 1\}$ si bien, d'après **6.b.**, que pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_{k+1} = i) &= \sum_{j=0}^1 \mathbb{P}(Y_k = i - j, Z_{k+1} = j) = \sum_{\substack{j \in \{0,1\} : \\ \mathbb{P}(Y_k = i-j) > 0}} \mathbb{P}(Y_k = i - j) \mathbb{P}_{[Y_k=i-j]}(Z_{k+1} = j) \\ &= \frac{i}{n} \mathbb{P}(Y_k = i) + \left(1 - \frac{i-1}{n}\right) \mathbb{P}(Y_k = i - 1). \end{aligned}$$

c. Pour $k \in \mathbb{N}$, il vient d'après **b.**,

$$\begin{aligned} G_{k+1} &= \sum_{i=0}^n \frac{i}{n} \mathbb{P}(Y_k = i)X^i + \sum_{i=1}^{n+1} \left(1 - \frac{i-1}{n}\right) \mathbb{P}(Y_k = i-1)X^i \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{i}{n} \mathbb{P}(Y_k = i)X^i + \sum_{i=0}^n \left(1 - \frac{i}{n}\right) \mathbb{P}(Y_k = i)X^{i+1} \\ &= \frac{1}{n}(X - X^2) \sum_{i=0}^n i \mathbb{P}(Y_k = i)X^{i-1} + X \sum_{i=0}^n \mathbb{P}(Y_k = i)X^i \\ &= \frac{1}{n}X(1 - X)G'_k + XG_k. \end{aligned}$$

d. D'après **c.**, $G_{k+1} = \varphi(G_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, d'où l'on déduit par récurrence immédiate que $G_k = \varphi^k(G_0)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

8. a. Sachant la variable Y_k à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$, on a :

$$G_k(1) = \sum_{i=0}^n \mathbb{P}(Y_k = i) = 1 \text{ et } G'_k(1) = \sum_{i=0}^n i \mathbb{P}(Y_k = i) = \mathbb{E}(Y_k).$$

b. En dérivant la relation établie en 7.c., on obtient pour $k \in \mathbb{N}$:

$$G'_{k+1} = \frac{1}{n}X(1 - X)G''_k + \frac{1}{n}(1 + (n - 2)X)G'_k + G_k$$

puis, en évaluant en 1, d'après **a.** :

$$\mathbb{E}(Y_{k+1}) = G'_{k+1}(1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)G'_k(1) + G_k(1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \mathbb{E}(Y_k) + 1.$$

c. La formule de la question **b.** est une relation de récurrence arithmético-géométrique pour la suite $(\mathbb{E}(Y_k))_{k \in \mathbb{N}}$. Dans ces conditions, la suite de terme général $\mathbb{E}(Y_k) - n$, $k \in \mathbb{N}$, est géométrique de raison $1 - \frac{1}{n}$, ce qui conduit à l'expression :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}(Y_k) = n + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k (\mathbb{E}(Y_0) - n) = n \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k\right).$$

9. a. Par application directe de la formule du binôme, il vient :

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} P_j = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} X^j (1 - X)^{n-j} = (X + (1 - X))^n = 1.$$

b. Pour $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, la même formule du binôme donne :

$$P_j = X^j \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} (-X)^k = \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} (-1)^k X^{k+j} = \sum_{i=j}^n \binom{n-j}{i-j} (-1)^{i-j} X^i$$

par changement d'indice $i = k + j$.

c. D'après 5.a., 7.a., a. et b.,

$$\begin{aligned} \varphi^k(G_0) &= \varphi^k\left(\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} P_j\right) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \varphi^k(P_j) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left(\frac{j}{n}\right)^k P_j \\ &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left(\frac{j}{n}\right)^k \sum_{i=j}^n \binom{n-j}{i-j} (-1)^{i-j} X^i = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^i \binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j}\right) \left(\frac{j}{n}\right)^k (-1)^{i-j} X^i. \end{aligned}$$

d. Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après 7.d. et c.,

$$\sum_{i=0}^n \mathbb{P}(Y_k = i)X^i = G_k = \varphi^k(G_0) = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^i \binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j}\right) \left(\frac{j}{n}\right)^k (-1)^{i-j} X^i$$

d'où, par identification :

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(Y_k = i) = \sum_{j=0}^i \binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k (-1)^{i-j}.$$

Pour finir, il reste à remarquer que pour tous $i, j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tels que $j \leq i$,

$$\binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j} = \frac{n!}{j!(n-j)!} \frac{(n-j)!}{(i-j)!(n-i)!} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \frac{i!}{j!(i-j)!} = \binom{n}{i} \binom{i}{j}$$

pour conclure :

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(Y_k = i) = \binom{n}{i} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} (-1)^{i-j} \left(\frac{j}{n}\right)^k.$$

