EDHEC 2018 S

Sujet 2, épreuve annulée

Éléments de correction

Premier exercice

1. a. Pour $k \geqslant 2$, la décroissance de la fonction $t \longmapsto \frac{1}{t \ln t}$ sur $[2, +\infty[$, produit de fonctions décroissantes et positives, garantit que :

$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t \ln t} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{k \ln k} = \frac{1}{k \ln k}.$$

b. Il ressort de la question **a.** que :

$$\forall n \geqslant 2, \quad \sum_{k=2}^{n} a_k \geqslant \sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t \ln t} = \int_2^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t \ln t} = \left[\frac{\ln(\ln t)}{2}\right]_2^{n+1}$$
$$= \ln\big(\ln(n+1)\big) - \ln(\ln 2) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty.$$

La suite des sommes partielles de la série $\sum a_n$ est donc divergente, tout comme la série.

2. a. La fonction f est continue sur $]-\infty, 0[\cup]0, 1[$ par opérations sur les fonctions continues. Elle est également continue en 0 car :

$$f(x) = \frac{-x}{(1-x)\ln(1-x)} \sim \frac{-x}{1 \cdot (-x)} = 1 \to 1 = f(0), \quad x \to 0, x \neq 0.$$

b. Il vient :

$$\left.\begin{aligned} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \frac{-x - (1-x)\ln(1-x)}{x(1-x)\ln(1-x)} = \frac{-x - (1-x)\big(-x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\big)}{x(1-x)\ln(1-x)} \\ &= \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x(1-x)\ln(1-x)} \sim \frac{\frac{-x^2}{2}}{-x^2} \to \frac{1}{2} \end{aligned}\right., \quad x \to 0, x \neq 0$$

si bien que f est dérivable en 0 avec $f'(0) = \frac{1}{2}$.

3. a. La fonction f est dérivable sur $]-\infty, 0[\cup]0, 1[$ par opérations sur les fonctions dérivables, avec :

$$\forall x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[, \quad f'(x) = -\frac{x + \ln(1-x)}{(1-x)^2 \ln^2(1-x)}.$$

b. La fonction $t \longmapsto \ln(1+t)$ étant dérivable de dérivée décroissante sur l'intervalle $]-1, +\infty[$, elle y est concave. Son graphe se situe donc en-dessous de sa tangente à l'origine, ce qui signifie que $\ln(1+t) \leqslant t$ pour tout $t > -1$. En appliquant cette inégalité à $t = -x$, on en déduit que $\ln(1-x) + x \leqslant 0$ pour tout $x < 1$. La stricte concavité précise que l'égalité n'est réalisée que pour $x = 0$.
Avec **a.**, on a en déduit que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[$, d'où il ressort que f est strictement croissante sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, 1[$. Comme elle est continue en 0, elle est finalement strictement croissante sur $]-\infty, 1[$.

c. Par croissances comparées et opérations sur les limites, il apparaît que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque $x \to 1$. Par ailleurs, $f(x) \sim \frac{1}{\ln(1-x)}$ tend vers 0 lorsque $x \to -\infty$.
On laisse le soin au lecteur de tracer le tableau de variations dans une situation aussi délicate...

4. a. Continue et strictement croissante sur $]-\infty, 1[$ d'après les questions **2.** et **3.**, la fonction f réalise une bijection de $]-\infty, 1[$ sur $]\lim_{-\infty} f, \lim_1 f[=]0, +\infty[$. Elle admet donc une fonction réciproque f^{-1} continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^* \subset]0, +\infty[$, l'équation $f(x) = n$ admet donc une unique solution $x \in]-\infty, 1[$: $u_n = f^{-1}(n) \geqslant f^{-1}(1) = 0 = u_1$.

b. Par composition des limites, $u_n = f^{-1}(n)$ converge vers $\lim_{+\infty} f^{-1} = 1$ lorsque $n \to \infty$.
Remarque. On peut évidemment faire plus compliqué : observer que $(u_n)_n = \big(f^{-1}(n)\big)_n$ est croissante et majorée donc convergente vers une limite ℓ, que l'on détermine ensuite en remarquant que si $\ell < 1$, on obtient une contradiction en passant à la limite dans $f(u_n) = n$ lorsque $n \to \infty$.

c. Pour $n \geqslant 1$,
$$f\left(1-\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)=\frac{n\sqrt{n}-1}{\ln n\sqrt{n}}\sim n\cdot\frac{2\sqrt{n}}{3\ln n},\quad n\to\infty$$
si bien que
$$\frac{1}{n}f\left(1-\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\sim\frac{2\sqrt{n}}{3\ln n}\to+\infty,\quad n\to\infty.$$
Il existe donc un entier $n_0 \geqslant 1$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on ait $f\left(1-\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\geqslant n$ puis, par croissance de f^{-1}, $1-\frac{1}{n\sqrt{n}}\geqslant f^{-1}(n)=u_n$.

d. D'après **c.**,
$$\forall n\geqslant n_0,\quad 0>\ln(1-u_n)\geqslant\ln\frac{1}{n\sqrt{n}}=-\frac{3}{2}\ln n$$
d'où, par décroissante de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_-^*$,
$$\forall n\geqslant n_0,\quad -\frac{1}{n\ln(1-u_n)}\geqslant\frac{2/3}{n\ln n}=\frac{2}{3}a_n\geqslant 0.$$
On en déduit alors la divergence de la série $\sum\frac{-1}{n\ln(1-u_n)}$ par comparaison à la série $\sum a_n$, divergente d'après **1.b.**.

e. Par définition,
$$\forall n\geqslant 1,\quad n=f(u_n)=\frac{-u_n}{(1-u_n)\ln(1-u_n)}$$
d'où
$$\forall n\geqslant 1,\quad 1-u_n=\frac{-u_n}{n\ln(1-u_n)}\sim\frac{-1}{n\ln(1-u_n)}\geqslant 0$$
car (u_n) converge vers 1 d'après **b.**. Il en ressort que la série $\sum(1-u_n)$ diverge par comparaison à la série $\sum\frac{-1}{n\ln(1-u_n)}$, divergente d'après **d.**.

Deuxième exercice

Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont finies et admettent donc une espérance.

1. a. Pour $i=j$, $X_iX_j=X_i^2=1$ car X_i est à valeurs dans $\{-1,1\}$, si bien que $\mathbb{E}(X_iX_j)=1$. Pour $i\neq j$, les variables X_i et X_j sont indépendantes par hypothèse, si bien que $\mathbb{E}(X_iX_j)=\mathbb{E}(X_i)\,\mathbb{E}(X_j)=0$.

b. Avec des notations abusives [1],
$$X=\left\|\sum_{k=1}^n X_k u_k\right\|^2=\sum_{k=1}^n X_k^2\,\|u_k\|^2+\sum_{1\leqslant i\neq j\leqslant n}X_iX_j\,\langle u_i,u_j\rangle$$
d'où, sachant les vecteurs $u_1,\dots,u_n$ unitaires et compte-tenu de la question **a.**,
$$\mathbb{E}(X)=\sum_{k=1}^n\mathbb{E}(X_k^2)+\sum_{1\leqslant i\neq j\leqslant n}\mathbb{E}(X_iX_j)\,\langle u_i,u_j\rangle=n.$$

c. S'il n'existait aucun vecteur $x\in\{-1,1\}^n$ tel que $\|w_x\|\leqslant\sqrt{n}$, alors on aurait
$$\forall(x_1,\dots,x_n)\in\{-1,1\}^n,\quad\left\|\sum_{k=1}^n x_k u_k\right\|^2>n,$$
si bien que la variable aléatoire $X-n$ ne prendrait que des valeurs strictement positives, tout en étant centrée d'après **b.**, ce qui est absurde [2] : comme X est finie, il existerait $\varepsilon>0$ tel que $X-n\geqslant\varepsilon$ et l'on aurait $\mathbb{E}(X-n)\geqslant\varepsilon>0$.
Il en ressort l'existence d'un vecteur $x\in\{-1,1\}^n$ tel que $\|w_x\|\leqslant\sqrt{n}$, et l'on montrerait de même l'existence d'un autre vecteur x pour lequel $\|w_x\|\geqslant\sqrt{n}$.

1. En toute rigueur, il faudrait plutôt écrire
$$\forall\omega\in\Omega,\quad X(\omega)=\left\|\sum_{k=1}^n X_k(\omega)u_k\right\|^2=\sum_{k=1}^n X_k(\omega)^2\,\|u_k\|^2+\sum_{1\leqslant i\neq j\leqslant n}X_i(\omega)X_j(\omega)\,\langle u_i,u_j\rangle.$$

2. On peut également invoquer une propriété du cours pour faire apparaître la contradiction : pour une variable Y positive admettant une espérance, on a $\mathbb{E}(Y)\geqslant 0$ avec égalité si, et seulement si, Y est presque sûrement nulle.

2. a. Pour $i, j \in [\![1, n]\!]$, on a :
$$\mathbb{E}\big((p_i - Y_i)(p_j - Y_j)\big) = \mathbb{E}\big[\big(Y_i - \mathbb{E}(Y_i)\big)\big(Y_j - \mathbb{E}(Y_j)\big)\big] = \operatorname{cov}(Y_i, Y_j).$$
Or $\operatorname{cov}(Y_i, Y_j) = 0$ lorsque $i \neq j$ puisque les variables Y_i et Y_j sont alors indépendantes, et $\operatorname{cov}(Y_i, Y_j) = \mathbb{V}(Y_i)$ lorsque $i = j$. Ainsi,
$$\mathbb{E}\big((p_i - Y_i)(p_j - Y_j)\big) = \begin{cases} p_i(1-p_i) & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

b. Avec les mêmes notations abusives qu'en **1.b.**,
$$Y = \Big\| \sum_{k=1}^{n} (p_k - Y_k) v_k \Big\|^2 = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (p_i - Y_i)(p_j - Y_j) \langle v_i, v_j \rangle$$
d'où, d'après **a.**,
$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \mathbb{E}\big((p_i - Y_i)(p_j - Y_j)\big) \langle v_i, v_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} p_k(1-p_k) \|v_k\|^2 \leqslant \frac{n}{4}$$
car pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $\|v_k\| \leqslant 1$ par hypothèse, mais aussi $0 \leqslant p_k(1-p_k) \leqslant \frac{1}{4}$ classiquement.

c. S'il n'existait aucun vecteur $x \in \{0,1\}^n$ pour lequel $\|z - y_x\| \leqslant \frac{\sqrt{n}}{2}$, la variable $Y - \frac{n}{4}$ serait à valeurs strictement positives. En raisonnant comme en **1.c.**, on peut alors mettre en évidence une contradiction avec le résultat de la question **b.** selon lequel $\mathbb{E}(Y - \frac{n}{4}) \leqslant 0$. C'est donc qu'il existe $x \in \{0,1\}^n$ tel que $\|z - y_x\| \leqslant \frac{\sqrt{n}}{2}$.

Troisième exercice

1. a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la variable X_n suit la loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$: elle est à valeurs dans $[\![0, n]\!]$ avec
$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{1}{n+1}.$$

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la variable finie X_n admet une espérance donnée par :
$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{x \in X_n(\Omega)} x\, \mathbb{P}(X_n = x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n}{2}.$$
On obtient de même l'existence et la valeur de
$$\mathbb{E}(X_n^2) = \sum_{x \in X_n(\Omega)} x^2\, \mathbb{P}(X_n = x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(2n+1)}{6}$$
d'où finalement celles de
$$\mathbb{V}(X_n) = \mathbb{E}(X_n^2) - \mathbb{E}(X_n)^2 = \frac{n(2n+1)}{6} - \frac{n^2}{4} = \frac{n(n+2)}{12}.$$

2. a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $[Y = n] = [X_1 > 0] \cap \cdots \cap [X_{n-1} > 0] \cap [X_n = 0]$.

b. Par indépendance des variables $X_1, \ldots, X_n$, il vient :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(Y = n) = \mathbb{P}(X_n = 0) \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(X_k > 0) = \frac{1}{n+1} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$
par télescopage.

c. On a :
$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(Y = n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big) = 1 - \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} = 1$$
par télescopage, l'existence de la limite finie garantissant la convergence de la série [3].
Remarque. Ainsi l'éventualité que le mobile ne revienne jamais à l'origine est-elle de probabilité nulle, ce qui permet d'accepter la définition de Y comme variable aléatoire.

3. Que l'on savait déjà convergente car les événements $[Y = n]$, $n \geqslant 1$, sont deux-à-deux incompatibles.

d. La variable Y n'admet pas d'espérance car la série de terme général $n\,\mathbb{P}(Y=n)=\frac{1}{n+1}\sim\frac{1}{n}\geqslant 0$, $n\geqslant 1$, est divergente par comparaison à la série harmonique $\sum\frac{1}{n}$, divergente.

3. a. Pour changer de la comparaison série-intégrale[4], déjà utilisée dans le premier exercice, on peut plutôt s'appuyer sur l'inégalité des accroissements finis : pour $k\in\mathbb{N}^*$ donné, la fonction ln étant dérivable sur $[k,k+1]$ avec

$$\forall t\in[k,k+1],\quad \frac{1}{k+1}\leqslant \ln' t=\frac{1}{t}\leqslant\frac{1}{k},$$

elle garantit que

$$\frac{1}{k+1}\leqslant\ln(k+1)-\ln k\leqslant\frac{1}{k}.$$

b. Pour $j\geqslant 2$, on obtient en sommant les inégalités établies **a.** pour k variant entre 1 et $j-1$, par télescopage et changement d'indice :

$$\sum_{k=1}^{j-1}\frac{1}{k}-1+\frac{1}{j}=\sum_{k=2}^{j}\frac{1}{k}\leqslant\ln j\leqslant\sum_{k=1}^{j-1}\frac{1}{k},$$

d'où il ressort que :

$$\ln j\leqslant\sum_{k=1}^{j-1}\frac{1}{k}\leqslant\ln j+1-\frac{1}{j}.$$

c. En divisant tous les membres de l'inégalité obtenue en **b.** par $\ln j>0$, on obtient :

$$\forall j\geqslant 2,\quad 1\leqslant\frac{1}{\ln j}\sum_{k=1}^{j-1}\frac{1}{k}\leqslant 1+\frac{1}{\ln j}-\frac{1}{j\ln j}$$

où les deux membres extrémaux convergent vers 1 lorsque $j\to\infty$. On en déduit par encadrement qu'il en va de même du membre central, ce qui signifie que :

$$\sum_{k=1}^{j-1}\frac{1}{k}\sim\ln j,\quad j\to\infty.$$

4. a. Pour $i\geqslant j\geqslant 1$, les événements $[Y=i]$ et $[Z=j]$ sont incompatibles, si bien que $\mathbb{P}_{[Y=i]}(Z=j)=0$.

b. Soient $1\leqslant i<j$ entiers. Conditionnellement à l'événement $[Y=i]$, on a $Z=j$ si, et seulement si, l'événement $[X_{i+1}>0]\cap\cdots\cap[X_{j-1}>0]\cap[X_j=0]$ se réalise. Puisque l'événement $[Y=i]$ appartient à la tribu $\mathcal{A}_{(X_1,\ldots,X_i)}$ d'après **2.a.**, indépendante de la tribu $\mathcal{A}_{(X_{i+1},\ldots,X_j)}$ d'après le lemme des coalitions et l'indépendance des variables $X_1,\ldots,X_i,\ldots,X_j$, on en déduit que :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{[Y=i]}(Z=j)&=\mathbb{P}_{[Y=i]}\Big([X_j=0]\cap\bigcap_{k=i+1}^{j-1}[X_k>0]\Big)=\mathbb{P}\Big([X_j=0]\cap\bigcap_{k=i+1}^{j-1}[X_k>0]\Big)\\&=\mathbb{P}(X_j=0)\prod_{k=i+1}^{j-1}\mathbb{P}(X_k>0)=\frac{1}{j+1}\prod_{k=i+1}^{j-1}\frac{k}{k+1}=\frac{i+1}{j(j+1)}.\end{aligned}$$

c. D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet associé à la variable Y, il vient d'après **2.b.**, **a.** et **b.** :

$$\forall j\geqslant 2,\quad \mathbb{P}(Z=j)=\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(Y=i)\,\mathbb{P}_{[Y=i]}(Z=j)=\sum_{i=1}^{j-1}\frac{1}{ij(j+1)}=\frac{1}{j(j+1)}\sum_{i=1}^{j-1}\frac{1}{i}$$

d. D'après les questions **3.c.** et **c.**,

$$j\,\mathbb{P}(Z=j)=\frac{1}{j+1}\sum_{i=1}^{j-1}\frac{1}{i}\sim\frac{\ln j}{j},\quad j\to\infty,$$

4. Partant de

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\quad \ln(k+1)-\ln k=\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{t},$$

on pourrait en effet justifier, par décroissance de $t\longmapsto\frac{1}{t}$ sur $[1,+\infty[$, que :

$$\forall k\geqslant 1,\quad \frac{1}{k+1}=\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{k+1}\leqslant\ln(k+1)-\ln k\leqslant\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{k}=\frac{1}{k}.$$

d'où il ressort que $0 \leqslant \frac{1}{j} = o\big(j\,\mathbb{P}(Z=j)\big)$ lorsque $j \to \infty$, si bien que la série $\sum_j j\,\mathbb{P}(Z=j)$ diverge par comparaison à la série harmonique, divergente : la variable Z n'admet donc pas d'espérance.
Remarque. Ce résultat peut être justifié plus simplement à partir du théorème de domination : sachant que $0 \leqslant Y \leqslant Z$ où Y n'admet pas d'espérance d'après **2.d.**, la variable Z ne peut admettre d'espérance.

5. a. Script et question complètement artificiels, pour ne pas dire sans intérêt, mais il faut tout de même répondre :

```
n=input('Note à moi-même : entrer n...');
    // Très utile, ce input...
disp(grand(1,1,'uin',0,n));
```

simule le n-ième déplacement du mobile et affiche sa nouvelle position.

b. Le script ci-dessous répond à la question.

Listing 1 : simulation et affichage des variables Y et Z

```
n=0;    // compteur de déplacements
a=0;    // compteur de retours à l'origine
while (a<2)
    n=n+1;
    if (grand(1,1,'uin',0,n)==0) then   // retour à l'origine
        a=a+1;
        if (a==1) then y=n; end
    end
end
disp(y,'y=');
disp(n,'z=');
```

Problème

Première partie

1. a. Il vient immédiatement :

$$u_0 = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad u_1 = \int_0^{\pi/2} \cos t \,\mathrm{d}t = 1.$$

b. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leqslant \cos t \leqslant 1$ donc $\cos^{n+1} t \leqslant \cos^n t$ pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, si bien que $u_{n+1} \leqslant u_n$ par croissance de l'intégrale. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.

c. Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \longmapsto \cos^n t$ positive, continue mais non identiquement nulle sur le segment non trivial $[0, \frac{\pi}{2}]$ y admet une intégrale strictement positive : $u_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t \,\mathrm{d}t > 0$.

2. a. Pour $n \in \mathbb{N}$, il vient par intégration par parties (en dérivant $t \longmapsto \cos^{n+1} t$ et en primitivant $t \longmapsto \cos t$) :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \cos t \cos^{n+1} t \,\mathrm{d}t = \big[\sin t \cos^{n+1} t\big]_0^{\pi/2} + (n+1)\int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^n t \,\mathrm{d}t \\ &= (n+1)\int_0^{\pi/2} (1-\cos^2 t)\cos^n t \,\mathrm{d}t = (n+1)(u_n - u_{n+2}) \end{aligned}$$

de sorte que $(n+2)u_{n+2} = (n+1)u_n$. On obtient ainsi une relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} u_n. \tag{1}$$

b. On démontre le résultat par récurrence à partir de (1) : il est immédiat au rang $n = 0$ vu **1.a.** et, s'il est acquis à un rang $n \geqslant 0$, alors

$$u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2}u_{2n} = \frac{2n+2}{2(n+1)}\frac{2n+1}{2(n+1)}\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{\big(2(n+1)\big)!}{\big(2^{n+1}(n+1)!\big)^2}\frac{\pi}{2},$$

d'où le résultat.

c. Toujours d'après **a.**, il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)u_{n+2}u_{n+1} = (n+1)u_{n+1}u_n,$$

si bien que la suite $\big((n+1)u_{n+1}u_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, égale à son premier terme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)u_{n+1}u_n = u_1u_0 = \frac{\pi}{2}.$$

d. D'après **b.** et **c.**,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{2n+1} = \frac{\pi}{2(2n+1)u_{2n}} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}.$$

3. a. D'après (1),

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+2}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1.$$

b. D'après **1.b.** et **1.c.**,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+2}}{u_n} \leqslant \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{u_n}{u_n} = 1$$

d'où il ressort, par encadrement d'après **a.**, que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1.$$

c. La question **b.** assure que $u_n \sim u_{n+1}$ si bien que $(n+1)u_n^2 \sim (n+1)u_{n+1}u_n = \frac{\pi}{2}$ d'après **2.c.**, d'où finalement

$$u_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}, \quad n \to \infty.$$

4. N'en déplaise à l'auteur du sujet, on propose ci-dessous une fonction calculant u_n plutôt qu'un script à la mode grand-papa...

Listing 2 : calcul de u_n

```
function y=u(n)
    y=%pi/2;
    for k=1:n  // exécuté seulement pour n>=1
        y=%pi/2/y/k;
    end
endfunction
```

Deuxième partie

5. La fonction f est positive sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0 et $\frac{\pi}{2}$, d'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \sin t\,\mathrm{d}t = \big[-\cos t\big]_0^{\pi/2} = 1,$$

convergente puisque la primitive choisie admet des limites finies en 0 et 1. La fonction f est donc une densité de probabilité.

6. Par théorème,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{F}(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Puisque f est nulle en dehors de $[0, \frac{\pi}{2}]$, on a déjà $\mathrm{F}(x) = 0$ pour $x < 0$ et $\mathrm{F}(x) = 1$ pour $x > \frac{\pi}{2}$. Cela signifie que X est presque sûrement à valeurs dans $[0, \frac{\pi}{2}]$. Pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$\mathrm{F}(x) = \int_0^x \sin t\,\mathrm{d}t = 1 - \cos x.$$

En conclusion,

$$\mathrm{F} : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \cos x & \text{si } 0 \leqslant x < \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{si } \frac{\pi}{2} \leqslant x \end{cases}.$$

7. a. La variable, presque sûrement bornée comme on l'a fait remarquer en **6.**, admet une espérance que l'on peut calculer par intégration par parties :

$$\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} t\sin t\,\mathrm{d}t = \big[-t\cos t\big]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos t\,\mathrm{d}t = 1.$$

b. On justifie de même l'existence et on calcule grâce à deux intégrations par parties successives la valeur de

$$\mathbb{E}(\mathrm{X}^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} t^2\sin t\,\mathrm{d}t = \pi - 2.$$

On en déduit l'existence et la valeur de $\mathbb{V}(\mathrm{X}) = \mathbb{E}(\mathrm{X}^2) - \mathbb{E}(\mathrm{X})^2 = \pi - 3$.

8. a. Pour $n \geqslant 2$ donné, il vient classiquement par indépendance de $\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{F}_n(x) = \mathbb{P}\big(\min(\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n) \leqslant x\big) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{k=1}^n [\mathrm{X}_k \leqslant x]\Big) = 1 - \mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=1}^n [\mathrm{X}_k > x]\Big)$$

$$= 1 - \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(\mathrm{X}_k > x) = 1 - \big(1 - \mathrm{F}(x)\big)^n = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \cos^n x & \text{si } 0 \leqslant x < \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{si } \frac{\pi}{2} \leqslant x \end{cases}.$$

b. D'après la question **a.**,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \mathrm{F}_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} = \mathrm{F}_0(x),$$

où F_0 est la fonction de répartition de la variable aléatoire constante égale à 0. Bien que la convergence n'ait pas lieu pour $x = 0$, point de discontinuité de F_0, cela suffit pour conclure que la suite (I_n) converge en loi vers 0.

c. Pour $n \geqslant 2$ donné, la fonction F_n étant continue sur $\mathbb{R}$ (même en 0 et $\frac{\pi}{2}$) et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0, \frac{\pi}{2}\}$, la variable I_n est à densité et admet par exemple pour densité

$$f_n : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} \mathrm{F}_n'(x) & \text{si } x \notin \{0, \frac{\pi}{2}\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} n\sin x\cos^{n-1} x & \text{si } x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

La variable I_n étant elle aussi presque sûrement bornée, elle admet un moment d'ordre 2 dont on peut retravailler l'expression par intégration par parties :

$$\mathbb{E}(\mathrm{I}_n^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_n(t)\,\mathrm{d}t = n\int_0^{\pi/2} t^2 \sin t\cos^{n-1} t\,\mathrm{d}t$$

$$= \big[-t^2\cos^n t\big]_0^{\pi/2} + 2\int_0^{\pi/2} t\cos^n t\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi/2} t\cos^n t\,\mathrm{d}t.$$

d. Il vient immédiatement d'après **c.** :

$$\forall n \geqslant 2, \quad \mathbb{E}(\mathrm{I}_n^2) = 2\int_0^{\pi/2} t\cos^n t\,\mathrm{d}t \leqslant 2\int_0^{\pi/2} \frac{\pi}{2}\cos^n t\,\mathrm{d}t = \pi u_n.$$

e. D'après l'inégalité de Markov appliquée à la variable I_n^2, positive et admettant une espérance, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall n \geqslant 2, \quad \mathbb{P}(|\mathrm{I}_n| \geqslant \varepsilon) = \mathbb{P}(\mathrm{I}_n^2 \geqslant \varepsilon^2) \leqslant \frac{\mathbb{E}(\mathrm{I}_n^2)}{\varepsilon^2} \leqslant \frac{\pi}{\varepsilon^2} u_n.$$

Puisque le dernier majorant obtenu converge vers 0 lorsque $n \to \infty$ d'après **3.c.**, il en ressort par encadrement que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|\mathrm{I}_n| \geqslant \varepsilon) = 0,$$

c'est-à-dire que (I_n) converge en probabilité vers la variable certaine égale à 0.

Remarque. Curieux choix de l'énoncé de faire intervenir I_n^2 sachant que I_n est presque sûrement à valeurs dans $[0, \frac{\pi}{2}]$, alors que d'une part le résultat est immédiat en revenant à la définition :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall n \geqslant 2, \quad \mathbb{P}(|I_n| \geqslant \varepsilon) = 1 - \mathbb{P}(I_n < \varepsilon) = 1 - F_n(\varepsilon)$$

tend vers 0 lorsque $n \to \infty$ d'après **b.**, et d'autre part que si on tient vraiment à s'appuyer sur l'inégalité de Markov, il est plus simple de l'appliquer directement à la variable positive I_n, dont on montre comme en **c.** qu'elle admet pour espérance $\mathbb{E}(I_n) = u_n$. Le charme des sujets EDHEC, sans doute...

9. a. La fonction h étant continue et strictement décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, elle réalise une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}]$ sur $[h(\frac{\pi}{2}), h(0)] = [0, 1]$.

b. Puisque X est presque sûrement à valeurs dans $[0, \frac{\pi}{2}]$, on peut poser $Y = h(X)$.
Comme h est à valeurs dans $[0, 1]$, on a tout d'abord $\mathbb{P}(Y \leqslant y) = 0$ pour $y < 0$ et $\mathbb{P}(Y \leqslant y) = 1$ pour $y > 1$. Pour $y \in [0, 1]$, la stricte décroissance de h garantit que :

$$\mathbb{P}(Y \leqslant y) = \mathbb{P}\big(h(X) \leqslant y\big) = \mathbb{P}\big(X \geqslant h^{-1}(y)\big) = 1 - F\big(h^{-1}(y)\big) = y$$

d'après **6.**, sachant que X est à densité. La variable Y suit donc la loi uniforme sur $[0, 1]$.

c. Il suffit de simuler Y suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$ puis d'appliquer la fonction h^{-1} pour simuler $X = h^{-1}(Y)$:

```
Y=grand(1,1,'unf',0,1);
X=acos(Y);
```