EDHEC 2018 S

Sujet 1, épreuve annulée

Retranscription du sujet

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Aucun document n'est autorisé. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.***
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Premier exercice

Soit f la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{2}{(\mathbf{e}^x + \mathbf{e}^{-x})^2}.$$

1. Étudier la parité de f.

2. Montrer que f peut être considérée comme densité d'une certaine variable aléatoire X.

3. a. Montrer que X possède une espérance et donner sa valeur.
b. Montrer que X possède une variance.

4. On note F la fonction de répartition de X. Montrer que F est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$.

5. On considère la variable aléatoire Y définie par $\mathrm{Y} = \mathrm{F}(\mathrm{X})$.
a. Déterminer la loi de Y.
b. Déterminer explicitement $\mathrm{F}(x)$ pour tout réel x.
c. Établir que la fonction F^{-1}, bijection réciproque de F, est définie par :

$$\forall x \in\,]0,1[, \quad \mathrm{F}^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{1-x}\right).$$

d. En déduire un script Scilab permettant de simuler la variable aléatoire X.

Deuxième exercice

Si k est un entier naturel non nul, alors pour tout endomorphisme f d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, on note

$$f^k = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ termes}}$$

et on pose $f^0 = \mathrm{id}_\mathrm{E}$, où id_E est l'endomorphisme identité de E.
On dit que l'endomorphisme f est nilpotent d'indice k ($k \in \mathbb{N}^*$) si l'on a $f^k = 0$ et $f^{k-1} \neq 0$.
On note I_2 la matrice identité de $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ et on dit qu'une matrice A de $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ est nilpotente d'indice k ($k \in \mathbb{N}^*$) si l'on a $\mathrm{A}^k = 0$ et $\mathrm{A}^{k-1} \neq 0$ (avec la convention $\mathrm{A}^0 = \mathrm{I}_2$).

Première partie

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice non nulle de $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Calculer $\mathrm{A}^2 - (a+d)\mathrm{A}$ en fonction de I_2.

2. On suppose dans cette question que A est nilpotente d'indice k.
 a. Établir l'égalité $ad - bc = 0$.
 b. Monter que k est supérieur ou égal à 2.
 c. En déduire alors que $a + d = 0$.

3. Conclure que A est nilpotente si, et seulement si, $A^2 = 0$.

Deuxième partie

On considère dans cette partie un endomorphisme f non nul d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension 2.

4. **a.** Montrer que si $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$, alors $f^2 = 0$.
 b. On suppose que $f^2 = 0$. Montrer que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Im} f$. Établir alors que $\operatorname{rg} f = 1$ puis conclure que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$.
 c. En déduire, à l'aide de la première partie, que f est nilpotent si, et seulement si, $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$.

On suppose dans toute la suite que f est nilpotent et on en étudie quelques propriétés.

5. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

6. On souhaite montrer par l'absurde qu'il est impossible de trouver deux endomorphismes u et v de E, nilpotents et tels que $f = u \circ v$. On suppose donc que ces deux endomorphismes existent.
 a. Montrer les inclusions $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} v \subset \operatorname{Ker} f$.
 b. En déduire les égalités $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} v = \operatorname{Ker} f$.
 c. En déduire l'égalité $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Im} v$.
 d. Conclure.

Troisième exercice

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On note I_n la matrice identité de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ et J_n la matrice de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments valent 1.

1. **a.** Déterminer le rang de J_n. En déduire que 0 est valeur propre de J_n et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.
 b. Vérifier que le vecteur V_n, élément de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont toutes les composantes sont égales à 1, est vecteur propre de J_n.
 c. À l'aide des questions précédentes, donner les valeurs propres de J_n.

Dans toute la suite, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad f_n(x) = \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k\Big) \exp\Big(-\sum_{k=1}^{n} x_k^2\Big).$$

2. Montrer que f_n est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$.

3. **a.** Montrer que pour tout i de $[\![1, n]\!]$, on a :

$$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \partial_i f_n(x) = \Big(1 - 2x_i \sum_{k=1}^{n} x_k\Big) \exp\Big(-\sum_{k=1}^{n} x_k^2\Big).$$

 b. En déduire que f_n possède deux points critiques $a = \frac{1}{\sqrt{2n}}(1, 1, \dots, 1)$ et $b = -a$.

4. **a.** Déterminer les dérivées partielles d'ordre 2 de f_n.
 b. Vérifier que la hessienne de f_n en a est $H_n(a) = \frac{-2}{\sqrt{2n\mathbf{e}}}(nI_n + J_n)$.
 c. À l'aide de la première question, donner les valeurs propres de $H_n(a)$.
 d. En déduire que f_n possède un extremum local en a.
 e. Sans refaire tous les calculs, donner une conclusion concernant le point critique b.

5. **a.** Étudier la fonction h qui, à tout t de $\mathbb{R}_+$, associe $h(t) = t\mathbf{e}^{-t^2}$.

b. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à deux vecteurs bien choisis de $\mathbb{R}^n$, muni de son produit scalaire canonique, montrer que :

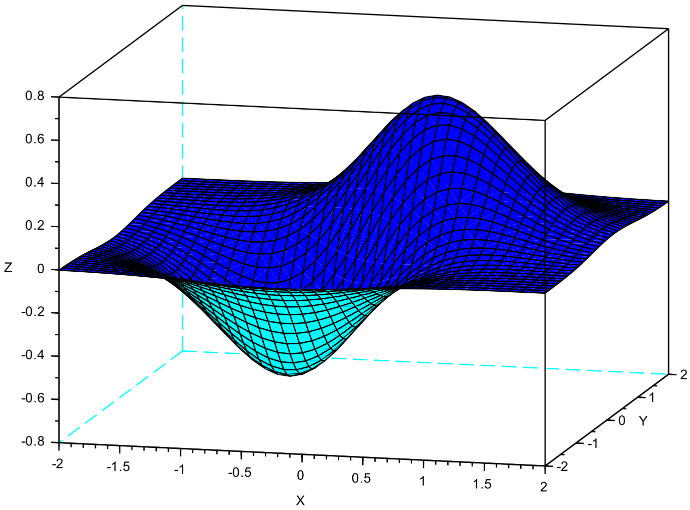
$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leqslant n \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

c. Déduire des deux questions précédentes que f_n admet en a et en b des extrema globaux.

6. Questions d'informatique

a. Écrire des commandes Scilab permettant de calculer et d'afficher $\mathrm{H}_n(a)$ pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

b. Dans le cas $n = 2$, la nappe suivante est-elle acceptable en tant que représentation graphique de la fonction f_2 ? Justifier.



Problème

On effectue des lancers d'une pièce donnant pile avec probabilité p, élément de $]0,1[$, et donnant face avec probabilité $q = 1 - p$, les différents lancers étant supposés indépendants.
Pour tout entier naturel k non nul, on note P_k (resp. F_k) l'événement « la pièce donne pile (resp. face) au k-ième lancer », on note également S_k le rang du k-ième pile et T_k le rang d'apparition du dernier pile de la première série de k piles consécutifs. On suppose que S_k et T_k sont deux variables aléatoires toutes deux définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Par exemple, si les lancers donnent $\mathrm{F}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{F}_3, \mathrm{P}_4, \mathrm{F}_5, \mathrm{P}_6, \mathrm{P}_7, \mathrm{P}_8$, alors S_1 et T_1 prennent la valeur 2, S_2 prend la valeur 4, T_2 prend la valeur 7, S_3 prend la valeur 6, T_3 prend la valeur 8, S_4 prend la valeur 7 et S_5 prend la valeur 8.

Première partie : simulation de S_k et T_k

1. Compléter les lignes 7 et 10 du script Scilab suivant pour qu'il affiche la valeur prise par S_k lorsque k et p sont entrés par l'utilisateur :

Listing 1 : code à compléter

```
1  k=input('donnez une valeur pour k :')
2  p=input('donnez une valeur pour p :')
3  n=0
4  c=0
5  while c<k
6      n=n+1
7      if --- then c=c+1
8      end
9  end
10 disp(---)
```

2. On souhaite que le script précédent affiche la valeur prise par T_k. Remplacer la ligne 7 par la suivante, dûment complétée :

```
if --- then c=c+1, else ---
```

Deuxième partie : calcul de l'espérance de S_k

3. Donner la loi de S_1 ainsi que son espérance.

4. Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à k, on note X_{n-1} la variable aléatoire égale au nombre de piles obtenus lors des $n-1$ premiers lancers.

a. Donner la loi de X_{n-1}.

b. Donner $S_k(\Omega)$ puis écrire l'événement $[S_k = n]$ à l'aide de la variable X_{n-1}.

c. En déduire que la loi de S_k est donnée par :

$$\forall n \geqslant k, \quad \mathbb{P}(S_k = n) = \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k}.$$

5. Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On pose $Z_1 = S_1$ et, pour tout entier naturel $i \geqslant 2$, $Z_i = S_i - S_{i-1}$. On admet que $(Z_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

a. Donner la loi des variables aléatoires Z_i.

b. Exprimer S_k à l'aide de certaines des variables Z_i.

c. En déduire que S_k possède une espérance et donner sa valeur.

6. Estimation
On suppose le paramètre p inconnu et on souhaite trouver un estimateur de p. On admet que, si une suite de variables aléatoires $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire Y, alors pour toute fonction f continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ tel que $P(Y \in I) = 1$, la suite $\big(f(Y_k)\big)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers $f(Y)$.

a. On pose :

$$\forall k \geqslant 2, \quad \overline{Z}_k = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} Z_i.$$

Montrer que la suite $(\overline{Z}_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité.

b. En déduire que $\frac{k}{S_k}$ est un estimateur convergent de p.

c. Donner sans calcul la valeur de $\sum_{j=k-1}^{\infty} \mathbb{P}(S_{k-1} = j)$. Monter alors que la variable aléatoire $\frac{k-1}{S_k-1}$ possède une espérance et que l'on a

$$\mathbb{E}\left(\frac{k-1}{S_k - 1}\right) = p.$$

d. En déduire que $\frac{k}{S_k}$ est un estimateur biaisé de p (on ne cherchera pas à calculer la valeur de ce biais).

Troisième partie : calcul de l'espérance de T_k

7. Comparer les variables aléatoires S_1 et T_1.

8. Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On admet que T_k possède une espérance que l'on se propose de déterminer.

a. Justifier, en utilisant la variable aléatoire W égale au rang du premier face lors de l'expérience décrite au début de ce problème, que les événements $F_1, P_1 \cap F_2, P_1 \cap P_2 \cap F_3, P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap F_4, \ldots,$ $P_1 \cap \cdots \cap P_{k-1} \cap F_k$ et $P_1 \cap \cdots \cap P_{k-1} \cap P_k$ forment un système complet d'événements.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à k, on a $\mathbb{P}_{F_1}(T_k = n) = \mathbb{P}(T_k = n-1)$, puis en déduire que l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(T_k \,|\, F_1)$ est égale à $1 + \mathbb{E}(T_k)$.

c. De la même façon, déterminer, pour tout i de $[\![2, k]\!]$, la valeur de $\mathbb{E}(T_k \,|\, P_1 \cap \cdots \cap P_{i-1} \cap F_i)$.

d. Justifier que $\mathbb{E}(T_k \,|\, P_1 \cap \cdots \cap P_k) = k$.

9. a. Déduire des questions précédentes la relation

$$\mathbb{E}(T_k) = \sum_{j=0}^{k-1} (j+1)p^j q + \mathbb{E}(T_k)\sum_{j=0}^{k-1} p^j q + kp^k.$$

b. Établir finalement que

$$\mathbb{E}(\mathrm{T}_k) = \frac{1-p^k}{qp^k}.$$

10. Justifier que $\mathbb{E}(\mathrm{S}_k) \leqslant \mathbb{E}(\mathrm{T}_k)$ puis utiliser certains résultats des deuxième et troisième parties pour établir, sans étude de fonction, que l'on a

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \forall p \in]0,1[, \quad (k-1)p^k \geqslant kp^{k-1} - 1.$$