ESSEC 2012

Éléments de correction

1. C'est une question de cours ! Puisque $(U_1, \dots, U_k)$ est une base orthonormale de F, le projeté orthogonal $p_F(X)$ d'un vecteur $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sur F s'écrit :

$$p_F(X) = \sum_{i=1}^{k} \langle U_i, X\rangle\, U_i = \sum_{i=1}^{k} U_i \langle U_i, X\rangle = \sum_{i=1}^{k} U_i({}^tU_iX) = \Big(\sum_{i=1}^{k} U_i{}^tU_i\Big)X.$$

La projection orthogonale sur F est donc représentée dans la base canonique de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ par la matrice $P = \sum_{i=1}^{k} U_i{}^tU_i$. On vérifie immédiatement sur l'expression précédente que ${}^tP = P$ i.e. que P est symétrique.

Première partie

2. a. La matrice ${}^tAA$, produit de ${}^tA \in \mathbf{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ par $A \in \mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, appartient à $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.
Pour $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $AX = 0$ implique bien sûr ${}^tAAX = 0$, ce qui justifie l'inclusion $\operatorname{Ker} A \subset \operatorname{Ker} {}^tAA$.

b. Réciproquement, si $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifie ${}^tAAX = 0$, alors $\|AX\|_m^2 = {}^tX{}^tAAX = 0$ d'où l'on déduit que $AX = 0$. On a donc l'inclusion réciproque $\operatorname{Ker} {}^tAA \subset \operatorname{Ker} A$ et finalement l'égalité $\operatorname{Ker} {}^tAA = \operatorname{Ker} A$. Sachant qu'une matrice à n colonnes est nulle si, et seulement si son noyau est égal à $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on en déduit que A et ${}^tAA$ sont simultanément nulles.

c. On a tout d'abord l'inclusion immédiate $\operatorname{Im} {}^tAA \subset \operatorname{Im} {}^tA$: pour $Y \in \operatorname{Im} {}^tAA$, il existe $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $Y = {}^tAAX$ et alors $Y = {}^tAZ \in \operatorname{Im} {}^tA$ pour $Z = AX$. Puis le théorème du rang appliqué à l'application linéaire canoniquement associée à $A \in \mathbf{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ (définie sur $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et à valeurs dans $\mathbf{M}_{m,1}(\mathbb{R})$) donne $\dim(\operatorname{Ker} A) + \operatorname{rg} A = n$. En comparant au résultat obtenu en travaillant sur ${}^tAA \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$: $\dim(\operatorname{Ker} {}^tAA) + \operatorname{rg} {}^tAA = n$, on en déduit que $\operatorname{rg} {}^tAA = \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} {}^tA$. Ainsi les sous-espaces $\operatorname{Im} {}^tAA$ et $\operatorname{Im} {}^tA$ ont même dimension et l'inclusion précédente est une égalité : $\operatorname{Im} {}^tAA = \operatorname{Im} {}^tA$.

3. a. On vérifie immédiatement que la matrice réelle ${}^tAA$ est symétrique : ${}^t({}^tAA) = {}^tAA$. Elle est donc diagonalisable et ses sous-espaces propres sont (supplémentaires) orthogonaux.
Pour une valeur propre λ de ${}^tAA$, il existe un vecteur $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tel que ${}^tAAX = \lambda X$. On a alors $\|AX\|_m^2 = {}^tX{}^tAAX = {}^tX\lambda X = \lambda \|X\|_n^2$ où $\|X\|_m^2 > 0$. Il en ressort que $\lambda \geqslant 0$, ainsi toutes les valeurs propres de ${}^tAA$ sont positives ou nulles.

b. Par orthogonalité des sous-espaces propres de la matrice symétrique ${}^tAA$, il vient pour deux entiers $i \neq j \in [\![1, p]\!]$:

$$\operatorname{Im} P_j = E_{\lambda_j}({}^tAA) \subset E_{\lambda_i}({}^tAA)^{\perp} = \operatorname{Ker} P_i$$

si bien que $P_iP_j = 0$.
Par ailleurs, les sous-espaces propres de ${}^tAA$ étant supplémentaires, tout vecteur $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ se décompose sous la forme $X = X_1 + \cdots + X_p$ où $X_i \in E_{\lambda_i}({}^tAA)$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$. Pour $i \in [\![1, p]\!]$ donné, on a vu que $X_j = P_jX_j \in \operatorname{Ker} P_i$ pour tout $j \neq i$, si bien que $P_iX = P_iX_i = X_i$. On a donc $X = \sum_i P_iX$ pour tout $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire $I_n = \sum_i P_i$.
En conservant les notations précédentes, ${}^tAAX = \sum_i {}^tAAX_i = \sum_i \lambda_iX_i = \sum_i \lambda_iP_iX$ d'où la relation ${}^tAA = \sum_i \lambda_iP_i$.

4. a. On calcule

$${}^tAA = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

On remarque immédiatement que ${}^t\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix}$ et ${}^t\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs propres de ${}^tAA$ respectivement associés aux valeurs propres 0 et 6. Le sous-espace propre $E_6({}^tAA)$ est le plan d'équation $x + y = 0$, les vecteurs $U_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}{}^t\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\end{pmatrix}$ et $U_3 = {}^t\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ en forment une base orthonormale. Son orthogonal est la somme des autres sous-espaces propres de ${}^tAA$. Comme il s'agit d'une droite, la matrice ${}^tAA$ admet 0 et 6 pour seules valeurs propres. Le sous-espace propre $E_0({}^tAA)$ est donc la droite dirigée par le vecteur $U_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}{}^t\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix}$, qui en forme une base orthonormale.

www.rblld.fr

D'après la question **1.**, les projections orthogonales sur $E_0({}^tAA)$ et $E_6({}^tAA)$ sont donc représentées en base canonique par les matrices

$$P_1 = U_1{}^tU_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P_2 = U_2{}^tU_2 + U_3{}^tU_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

La décomposition spectrale de la matrice ${}^tAA$ s'écrit ${}^tAA = 6P_2$.

Remarque. Lorsque la matrice ${}^tAA$ n'admet que deux valeurs propres comme ici, les matrices P_1 et P_2 des projecteurs spectraux peuvent être déterminées plus rapidement à partir des deux relations $P_1 + P_2 = I_3$ et $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = {}^tAA$.

b. Il vient :

$$({}^tAA)^2 - (A{}^tA){}^tAA = {}^tA(A{}^tA)A - (A{}^tA){}^tAA = 0$$

car $A{}^tA$ est un réel, si bien que le polynôme $X^2 - (A{}^tA)X$ annule la matrice ${}^tAA$. Les racines 0 et $A{}^tA$ de ce polynôme sont donc les seules valeurs propres éventuelles de ${}^tAA$. Celle-ci étant de rang $\operatorname{rg}{}^tAA = \operatorname{rg} A = 1$ d'après **2.c.**, la matrice ${}^tAA$ admet la valeur propre 0 si $n \geqslant 2$, avec un sous-espace propre de dimension $n-1$ d'après le théorème du rang. De plus, $({}^tAA){}^tA = {}^tA(A{}^tA) = (A{}^tA){}^tA$ et la colonne ${}^tA \neq 0$ est donc vecteur propre de ${}^tAA$ associé à la valeur propre $A{}^tA$. On en déduit la décomposition spectrale de ${}^tAA$:

$${}^tAA = (A{}^tA)P_2 \quad \text{où} \quad P_2 = \frac{1}{A{}^tA}{}^tAA \quad \text{et} \quad P_1 = I_n - P_2.$$

Deuxième partie

5. Si X est solution de l'équation, alors $\|AX - B\|_m = 0 \leqslant \|AZ - B\|_m$ pour tout $Z \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et X est donc pseudo-solution.

Réciproquement, si X est pseudo-solution alors, en notant Z une solution (qui existe par hypothèse), on a $\|AX - B\|_m \leqslant \|AZ - B\|_m = 0$ d'où $AX = B$ et X est solution.

Remarque. Attention, dans le cas où l'équation n'a pas de solution, une pseudo-solution n'est (bien sûr) pas solution !

6. En écrivant l'inégalité $\|AX - B\|_m^2 \leqslant \|AZ - B\|_m^2$ pour tout vecteur de la forme $Z = X + \lambda Y$ où $\lambda \in \mathbb{R}$, $Y \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on obtient :

$$\|AX - B\|_m^2 \leqslant \|\lambda AY + (AX - B)\|_m^2 = \lambda^2 \|AY\|_m^2 + 2\lambda{}^t(AY)(AX - B) + \|AX - B\|_m^2$$

i.e.

$$0 \leqslant \lambda^2 \|AY\|_m^2 + 2\lambda{}^tY{}^tA(AX - B).$$

L'inégalité ci-dessus étant valable pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, elle implique ${}^tY{}^tA(AX-B) = 0$ sans quoi le membre de droite serait équivalent à $2\lambda{}^tY{}^tA(AX - B)$ lorsque $\lambda \to 0$ et changerait de signe au voisinage de 0.

On a donc ${}^tY{}^tA(AX - B) = 0$ pour tout $Y \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ce qui signifie que le vecteur ${}^tA(AX - B)$ de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est orthogonal à tout vecteur ; il est donc nul : ${}^tAAX = {}^tAB$.

Remarque. Pour $AY \neq 0$, on peut aussi raisonner sur le polynome du second degré $\lambda \longmapsto \lambda^2 \|AY\|_m^2 + 2\lambda{}^tY{}^tA(AX - B)$, dont les deux racines sont évidentes : 0 et $-2{}^tY{}^tA(AX - B)$. Puisqu'il garde un signe constant, elles sont nécessairement égales, i.e. ${}^tY{}^tA(AX - B) = 0$, résultat que l'on obtient encore en écrivant que le discriminant est négatif ou nul.

7. Le raisonnement ci-dessus peut être remonté (tout vecteur de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ s'écrit sous la forme $Z = X + \lambda Y$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $Y \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) : la condition ${}^tAAX = {}^tAB$ entraîne que X est pseudo-solution. Comme ${}^tAB \in \operatorname{Im}{}^tA = \operatorname{Im}{}^tAA$ d'après **2.c.**, il existe un vecteur $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que ${}^tAAX = {}^tAB$, qui est donc pseudo-solution de l'équation $AX = B$.

Remarque. Ainsi les pseudo-solutions de l'équation $AX = B$ sont les solutions de l'équation ${}^tAAX = {}^tAB$: il faut donc être très précis sur l'équation dont on parle !

8. Les pseudo-solutions $X = {}^t\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ de l'équation $AX = B$ sont les solutions de l'équation

$${}^tAAX = {}^tAB \iff \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} y = x - 1 \\ z = 1 \end{cases}.$$

www.rblld.fr

Les pseudo-solutions de l'équation $AX = B$ sont donc les matrices de la forme

$$X_x = \begin{pmatrix} x \\ x-1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\|X_x\|_m^2 = x^2 + (x-1)^2 + 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}$$

est minimale pour $x = \frac{1}{2}$. La pseudo-solution de norme minimale de l'équation $AX = B$ est donc $\frac{1}{2}{}^t\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

9. L'existence d'une pseudo-solution X_0 de $AX = B$ ayant été établie en **7.**, il s'agit d'examiner son unicité. Un vecteur $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est pseudo-solution si, et seulement si,

$${}^tAAX = {}^tAB \iff {}^tAAX = {}^tAAX_0 \iff {}^tAA(X - X_0) = 0 \iff X - X_0 \in \operatorname{Ker} {}^tAA.$$

Les pseudo-solutions sont donc les éléments du sous-espace affine $X_0 + \operatorname{Ker} {}^tAA$. Il apparaît ainsi qu'il y a unicité si, et seulement si, $\operatorname{Ker} {}^tAA = \{0\}$, ce qui signifie que la matrice carrée ${}^tAA$ est inversible ou encore que $\operatorname{rg} {}^tAA = n$ c'est-à-dire, d'après **2.c.**, $\operatorname{rg} A = n$.
En conclusion, l'équation $AX = B$ admet une unique pseudo-solution si, et seulement si, $\operatorname{rg} A = n$.

Troisième partie

10. En prolongeant le raisonnement de la question **9.** dont on conserve les notations, les pseudo-solutions de norme minimale sont les vecteurs $S = X_0 - Y$ où $Y \in \operatorname{Ker} {}^tAA$ minimise $\|X_0 - Y\|_m$. Par théorème, il existe un unique vecteur Y réalisant ces conditions : le projeté orthogonal de X_0 sur le sous-espace vectoriel $\operatorname{Ker} {}^tAA$, qui est caractérisé par les conditions $Y \in \operatorname{Ker} {}^tAA$ et $X_0 - Y \perp \operatorname{Ker} {}^tAA$. La pseudo-solution correspondante $S = X_0 - Y$ est caractérisée par les conditions ${}^tAAS = {}^tAB$ et $S \perp \operatorname{Ker} {}^tAA$.

11. **a.** Si $\operatorname{rg} A = n$, l'analyse menée en **9.** montre que l'équation $AX = B$ admet pour unique pseudo-solution $S = ({}^tAA)^{-1}{}^tAB$, qui est donc la pseudo-solution de norme minimale.

b. Si $A = 0$, alors la quantité $\|AX - B\|_m = \|B\|_m$ est constante donc son minimum est atteint en tout point $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Ainsi tout élément de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est pseudo-solution et la pseudo-solution de norme minimale est donc le vecteur nul $S = 0$. Ce qui ressort aussi de la caractérisation obtenue en **10.** : seul le vecteur nul est orthogonal à $\operatorname{Ker} {}^tAA = \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

12. Étant données $B_1, B_2 \in \mathbf{M}_{m,1}(\mathbb{R})$, soient $S_1, S_2 \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ les pseudo-solutions de norme minimale respectives des équations $AX = B_1$ et $AX = B_2$. D'après **10.**, on a ${}^tAAS_i = {}^tAB_i$ et $S_i \perp \operatorname{Ker} {}^tAA$ pour $i \in \{1, 2\}$. On en déduit que pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $S = \lambda S_1 + S_2$ vérifie les deux relations ${}^tAAS = {}^tA(\lambda B_1 + B_2)$ et $S \perp \operatorname{Ker} {}^tAA$ caractéristiques de la pseudo-solution de norme minimale de l'équation $AX = \lambda B_1 + B_2$, d'où le résultat.

13. **a.** L'ensemble $\Gamma(A)$ ne peut être vide, sans quoi 0 serait la seule valeur propre de ${}^tAA$, dont la décomposition spectrale s'écrirait ${}^tAA = 0P_1 = 0$ mais cela impliquerait $A = 0$ d'après **2.b.**, en contradiction avec les hypothèses.

b. Soit $A^+ = \sum_{i \in \Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_i} P_i {}^tA$. Il s'agit de vérifier que, pour tout $B \in \mathbf{M}_{m,1}(\mathbb{R})$, la matrice A^+B est la pseudo-solution de norme minimale de l'équation $AX = B$. Or, d'après les relations établies en **3.b.**,

$${}^tAAA^+ = \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i P_i\right)\left(\sum_{j \in \Gamma(A)} \frac{1}{\lambda_j} P_j\right){}^tA = \left(\sum_{i,j \in \Gamma(A)} \frac{\lambda_i}{\lambda_j} P_i P_j\right){}^tA = \left(\sum_{i \in \Gamma(A)} P_i\right){}^tA = {}^tA$$

car si 0 est valeur propre de ${}^tAA$ alors, par un raisonnement classique sur la matrice symétrique ${}^tAA$, $\operatorname{Ker} P_1 = (\operatorname{Ker} {}^tAA)^\perp \supset \operatorname{Im} {}^tAA = \operatorname{Im} {}^tA$ si bien que $P_1 {}^tA = 0$. Il en résulte que ${}^tAA(A^+B) = {}^tAB$.
Par ailleurs, pour $i \in \Gamma(A)$, $\operatorname{Im} P_i = E_{\lambda_i}({}^tAA) \subset (\operatorname{Ker} {}^tAA)^\perp$ d'où $A^+B \in \sum_{i \in \Gamma(A)} \operatorname{Im} P_i \subset (\operatorname{Ker} {}^tAA)^\perp$.
Le résultat est donc établi.

14. Le calcul donne

$$A^+ = \frac{1}{6} P_2 {}^tA = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}{}^tA.$$

www.rblg.fr

On en déduit que la pseudo-solution S de norme minimale de l'équation $AX = B$ est donnée par $S = A^+B = \frac{1}{2}{}^t\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\end{pmatrix}$, en accord avec le résultat obtenu en **8.**.

15. Pour $A = 0$, la pseudo-solution de norme minimale associée à tout second membre $B \in \mathbf{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ est la matrice nulle si bien que $A^+ = 0$.
Si $A \neq 0$, alors la pseudo-inverse de A est donnée, d'après **4.b.**, par

$$A^+ = \frac{1}{A\,{}^tA}P_2\,{}^tA = \frac{1}{(A\,{}^tA)^2}{}^tA(A\,{}^tA) = \frac{1}{A\,{}^tA}{}^tA.$$

Quatrième partie

16. En raisonnant comme en **13.b.**, il vient :

$$A^+A = \Big(\sum_{i\in\Gamma(A)}\frac{1}{\lambda_i}P_i\Big)\Big(\sum_{j\in\Gamma(A)}\lambda_jP_j\Big) = \sum_{i\in\Gamma(A)}P_i.$$

Il apparaît que la matrice A^+A est symétrique comme combinaison linéaire de matrices symétriques (d'après **1.**).
De plus, si 0 n'est pas valeur propre de ${}^tAA$, on a $A^+A = I_n$ alors que si 0 en est valeur propre, $A^+A = I_n - P_1$. Dans tous les cas, A^+A est (la matrice en base canonique du) projecteur orthogonal sur $(\operatorname{Ker}{}^tAA)^\perp$. Il en résulte que $A - AA^+A = A(I_n - A^+A) = 0$ car $\operatorname{Im}(I_n - A^+A) = \operatorname{Ker}{}^tAA = \operatorname{Ker} A$. De même, $A^+ - A^+AA^+ = (I_n - A^+A)A^+ = 0$ car $\operatorname{Im} A^+ \subset \sum_{i\in\Gamma(A)}\operatorname{Im} P_i \subset (\operatorname{Ker}{}^tAA)^\perp = \operatorname{Ker}(I_n - A^+A)$.
Enfin, $AA^+ = \sum_{i\in\Gamma(A)}\frac{1}{\lambda_i}AP_i\,{}^tA$ est symétrique comme combinaison linéaire de matrices symétriques.

17. **a.** Il vient successivement $M\,{}^tM\,{}^tA = M\,{}^t(AM) = MAM = M$, ${}^tA\,{}^tMM = {}^t(MA)M = MAM = M$, puis de même $A\,{}^tA\,{}^tM = A\,{}^t(MA) = AMA = A$, ${}^tM\,{}^tAA = {}^t(AM)A = AMA = A$. En transposant les deux dernières relations, on obtient ${}^tA = {}^tAAM = MA\,{}^tA$.

b. Pour $B \in \mathbf{M}_{m,1}(\mathbb{R})$, on a donc ${}^tAB = {}^tAA(MB)$ et $MB = {}^tA\,{}^tMMB \in \operatorname{Im}{}^tA = \operatorname{Im}{}^tAA \subset (\operatorname{Ker}{}^tAA)^\perp$, si bien que MB est la pseudo-solution de norme minimale de l'équation $AX = B$. Il en ressort d'après **16.** que $M = A^+$ est la seule matrice de $\mathbf{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ à vérifier les relations $(*)$.

18. **a.** Pour montrer que $(A^+)^+ = A$, il suffit de montrer que $M = A$ satisfait les relations $(*)$ dans lesquelles on a remplacé A par A^+, ce qui est immédiat d'après **16.**.

b. En transposant les relations de la question **16.**, on montre que $M = {}^t(A^+)$ vérifie les relations $(*)$ dans lesquelles on a remplacé A par ${}^tA$, d'où l'on déduit que $({}^tA)^+ = {}^t(A^+)$.

19. Pour $x > 0$, la matrice

$${}^tAA + xI_n = \sum_{i=1}^{p}\lambda_iP_i + x\sum_{i=1}^{p}P_i = \sum_{i=1}^{p}(\lambda_i + x)P_i$$

est inversible car admet pour valeurs propres les réels $\lambda_i + x > 0$, $1 \leqslant i \leqslant p$, d'après **3.a.**.
Dans ces conditions, on montre facilement (faire le produit par ${}^tAA + xI_n$) que :

$$({}^tAA + xI_n)^{-1} = \sum_{i=1}^{p}\frac{1}{\lambda_i + x}P_i$$

d'où l'on déduit (comme en **13.b.**) que :

$$({}^tAA + xI_n)^{-1}\,{}^tA = \sum_{i=1}^{p}\frac{1}{\lambda_i + x}P_i\,{}^tA = \sum_{i\in\Gamma(A)}\frac{1}{\lambda_i + x}P_i\,{}^tA \xrightarrow[x>0]{x\to 0} \sum_{i\in\Gamma(A)}\frac{1}{\lambda_i}P_i\,{}^tA = A^+.$$

Pour la matrice A de la question **8.**, la résolution à $x > 0$ fixé du système

$$({}^tAA + xI_3)\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}3+x & 3 & 0\\3 & 3+x & 0\\0 & 0 & 6+x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} u = \dfrac{(3+x)a + 3b}{x(6+x)} \\ v = \dfrac{3a + (3+x)b}{x(6+x)} \\ w = \dfrac{c}{6+x} \end{cases}$$

www.rblld.fr

conduit à l'expression de

$$({}^t\mathrm{AA} + x\mathrm{I}_3)^{-1} = \frac{1}{x(6+x)} \begin{pmatrix} 3+x & 3 & 0 \\ 3 & 3+x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}.$$

On retrouve alors

$$\mathrm{A}^+ = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(({}^t\mathrm{AA} + x\mathrm{I}_3)^{-1}\,{}^t\mathrm{A} \right) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{6+x} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

20. On a

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left({}^t(\alpha\mathrm{A})(\alpha\mathrm{A}) - x\mathrm{I}_n \right)^{-1}\,{}^t(\alpha\mathrm{A}) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{\alpha} \left({}^t\mathrm{AA} - \frac{x}{\alpha^2}\mathrm{I}_n \right)^{-1}\,{}^t\mathrm{A} = \frac{1}{\alpha} \lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}} ({}^t\mathrm{AA} - y\mathrm{I}_n)^{-1}\,{}^t\mathrm{A} = \frac{1}{\alpha}\mathrm{A}^+$$

d'où $(\alpha\mathrm{A})^+ = \frac{1}{\alpha}\mathrm{A}^+$ d'après **19.**.

On en déduit que la matrice $(\alpha\mathrm{A})^+$ admet une limite lorsque $\alpha \to 0$ si, et seulement si, $\mathrm{A}^+ = 0$. Cette dernière condition équivaut à $\mathrm{A} = 0$: $\mathrm{A} = 0$ implique $\mathrm{A}^+ = 0$ d'après **13.b.** et réciproquement, $\mathrm{A}^+ = 0$ implique donc $\mathrm{A} = (\mathrm{A}^+)^+ = 0$ d'après **18.a.**. En conclusion, la matrice $(\alpha\mathrm{A})^+$ admet une limite finie lorsque $\alpha \to 0$ si, et seulement si, $\mathrm{A} = 0$.

Remarque. L'énoncé ne fait pas explicitement remarquer que pour une matrice *carrée* A *inversible*, on a $\mathrm{A}^+ = \mathrm{A}^{-1}$. En effet, l'équation $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ admet alors une unique solution $\mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}$, qui est aussi l'unique pseudo-solution, donc la pseudo-solution de norme minimale.

www.rblld.fr