Travaux dirigés

Révisions

ECS2 – Lycée La Bruyère, Versailles

Année 2017/2018

Exercice 1

Question 1

On utilise d'abord le développement limité de l'exponentielle :

$$\mathbf{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad x \to 0$$

puis celui du logarithme :

$$\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2), \quad y \to 0.$$

Puisque

$$y = 1 - \mathbf{e}^x = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \to 0, \quad x \to 0,$$

il est possible de composer les développements limités précédents car ceux-ci sont tous deux effectués au même ordre. Le développement limité de la composée s'obtient alors en ne conservant que les termes polynomiaux de degré inférieur ou égal à 2 dans la composition des parties régulières : lorsque $x \to 0$,

$$\ln(2-\mathbf{e}^x) = \ln(1+y) = \left(-x - \frac{x^2}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(-x - \frac{x^2}{2}\right)^2 + o(x^2) = -x - x^2 + o(x^2).$$

Exercice 1

Question 2.a

Puisque $\mathbf{e}^{1/n}$ tend vers 0 lorsque $n \to \infty$, le développement limité donne :

$$\left.\begin{aligned} v_n = \ln(2-\mathbf{e}^{1/n}) &= -\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= -\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \sim -\frac{1}{n} \leqslant 0, \end{aligned}\right. \quad n \to \infty.$$

Par suite, la série $\sum v_n$ est divergente par comparaison à la série de Riemann divergente $\sum 1/n$.

Exercice 1

Question 2.b

Comme la série $\sum v_n$ diverge d'après **a.**, la suite (V_n) de ses sommes partielles est divergente. De plus celle-ci est décroissante car $v_n \leqslant 0$ pour tout $n \geqslant 2$.
Décroissante et divergente, la suite (V_n) admet donc pour limite $-\infty$ d'après le théorème de la limite monotone.
Les théorèmes opératoires assurent alors que $u_n = \mathbf{e}^{V_n} \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

Exercice 1

Question 3.a

Il vient par télescopage, pour tout $n \geqslant 2$:

$$\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k-1}{k}\right) = \sum_{k=2}^{n} (\ln(k-1) - \ln k) = -\ln n$$

d'où

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{n}\left(\ln(2-\mathbf{e}^{1/k}) - \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right) &= V_n - \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \\ &= \ln u_n + \ln n = \ln(nu_n). \end{aligned}$$

Exercice 1

Question 3.b

La question **1.** fournit :

$$\begin{aligned} \ln(2-\mathbf{e}^{1/n}) - \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) &= \left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim -\frac{1}{2n^2} \leqslant 0 \end{aligned}$$

Exercice 1

Question 3.c

L'équivalent de la question précédente permet de conclure que la série

$$\sum\left(\ln(2-\mathbf{e}^{1/n}) - \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)$$

converge par comparaison à la série de Riemann convergente $\sum 1/n^2$. La suite de ses sommes partielles est donc convergente. Ainsi, d'après la question **a.**, la suite de terme général $\ln(nu_n)$, $n \geqslant 2$, converge vers un réel ℓ. Par suite, nu_n tend vers $\kappa = \mathbf{e}^{\ell} > 0$ lorsque $n \to \infty$, d'où l'on déduit que $u_n \sim \kappa/n > 0$ lorsque $n \to \infty$.
Il en résulte que la série $\sum u_n$ diverge par comparaison à la série de Riemann divergente $\sum 1/n$.

Exercice 1

Question 4

Du grand classique ! C'est une application directe du théorème des séries alternées, qu'il faut redémontrer puisqu'il n'est pas au programme. Soit (S_n) la suite des sommes partielles de la série $\sum(-1)^n u_n$:

$$\forall n \geqslant 2, \quad S_n = \sum_{k=2}^{n} (-1)^k u_k.$$

- On démontre tout d'abord que les suites $(S_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(S_{2n+1})_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes.
  - On a :
    $$\forall n \geqslant 1, \quad S_{2(n+1)} - S_{2n} = S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} - u_{2n+1} = \mathbf{e}^{V_{2n+2}} - \mathbf{e}^{V_{2n+1}} \leqslant 0$$
    puisque la suite $(V_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante d'après **2.b.**. La suite $(S_{2n})_{n\geqslant 1}$ est donc décroissante.
  - On démontre de même que la suite $(S_{2n+1})_{n\geqslant 1}$ est croissante.
  - Enfin,
    $$S_{2n+1} - S_{2n} = -u_{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$
    d'après la question **2.b.**.

- Adjacentes, les deux suites $(S_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(S_{2n+1})_{n\geqslant 1}$ sont donc convergentes vers une même limite S. Puisque ces deux suites recouvrent la suite complète $(S_n)_{n\geqslant 2}$, celle-ci converge alors elle aussi vers S.

On a ainsi démontré la convergence de la série $\sum(-1)^n u_n$.

Exercice 3

Question 1.a

Soient $n \geqslant 1$ et $t \in [0,1[$. En utilisant l'identité remarquable

$$1-t^n = (1-t)(1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}),$$

on obtient :

$$\frac{1}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}} - (1-t) = (1-t)\Big(\frac{1}{1-t^n}-1\Big) = \frac{(1-t)t^n}{1-t^n}.$$

Il en résulte que :

$$\forall t \in [0,1[,\quad 0 \leqslant \frac{1}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}} - (1-t) \leqslant \frac{(1-t)t^n}{1-t} = t^n$$

d'où, par croissance de l'intégrale (les fonctions sont continues sur le segment $[0,1]$) :

$$0 \leqslant u_n - \frac{1}{2} = \int_0^1 \Big(\frac{1}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}} - (1-t)\Big)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}.$$

On en déduit par encadrement que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Exercice 3

Question 1.b

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le changement de variable $u \longmapsto t = u^{1/n}$, de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement croissant de $]0,1[$ sur lui-même, donne :

$$u_n - \frac{1}{2} = \int_0^1 \frac{(1-t)t^n}{1-t^n}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{(1-u^{1/n})u^{1/n}}{1-u}\,\mathrm{d}u = \frac{v_n}{n}.$$

On remarquera que l'intégrale centrale converge par opéartions sur des intégrales convergentes (car faussement généralisées), d'où l'on déduit la convergence de l'intégrale v_n.

Exercice 3

Question 2.a

Pour $k \geqslant 1$, on a :

$$\frac{(\ln x)^k}{x-1} \sim \frac{(x-1)^k}{x-1} \to \begin{cases} 1 & \text{si } k=1 \\ 0 & \text{si } k \geqslant 2 \end{cases},\qquad x \to 1.$$

Exercice 3

Question 2.b

Pour $k \geqslant 1$, la fonction

$$f_k : x \longmapsto \frac{(\ln x)^k}{x-1}$$

est continue sur $]0,1[$. Elle est prolongeable par continuité en 1 d'après **a.**. On a par ailleurs

$$\sqrt{x} f_k(x) \sim -\sqrt{x}(\ln x)^k \to 0,\qquad x \to 0$$

d'où

$$f_k(x) = o\Big(\frac{1}{\sqrt{x}}\Big),\qquad x \to 0$$

et la convergence absolue de $\int_0^1 f_k(x)\,\mathrm{d}x$ par comparaison à l'intégrale de Riemann convergente $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$.

Exercice 3

Question 2.c

Soit $x \in]-\infty, 0]$. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[x,0]$ avec :

$$\forall t \in [x,0],\quad f'(t) = \mathbf{e}^t - 2\mathbf{e}^{2t},\quad f''(t) = \mathbf{e}^t - 4\mathbf{e}^{2t}.$$

Pour $t \in [x,0]$, on a $-1 \leqslant 4\mathbf{e}^t - 1 \leqslant 4-1 = 3$, d'où

$$\forall t \in [x,0],\quad |f''(t)| = \mathbf{e}^t\,|4\mathbf{e}^t - 1| \leqslant 3.$$

D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 appliquée à la fonction f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[x,0]$, il vient alors :

$$|f(x) - f(0) - (x-0)f'(0)| = |\mathbf{e}^x - \mathbf{e}^{2x} + x| \leqslant \frac{(x-0)^2}{2!}\sup_{t\in[0,x]}|f''(t)| \leqslant \frac{3x^2}{2}.$$

Exercice 3

Question 3.a

Soit $n \geqslant 1$. Pour $u \in]0,1]$, l'inégalité de la question **2.c.** appliquée à $x = \frac{\ln u}{n}$ amène :

$$\Big|u^{1/n} - u^{2/n} + \frac{\ln u}{n}\Big| = \Big|\mathbf{e}^{(\ln u)/n} - \mathbf{e}^{2(\ln u)/n} + \frac{\ln u}{n}\Big| \leqslant \frac{3}{2}\frac{(\ln u)^2}{n^2}.$$

Puisque l'intégrale du membre droite sur l'intervalle $]0,1]$ converge d'après la question **2.b.**, on en déduit que :

$$\begin{aligned}\Big|v_n + \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\ln u}{1-u}\,\mathrm{d}u\Big| &= \Big|\int_0^1 \Big(u^{1/n} - u^{2/n} + \frac{\ln u}{n}\Big)\frac{\mathrm{d}u}{1-u}\Big| \\ &\leqslant \int_0^1 \Big|u^{1/n} - u^{2/n} + \frac{\ln u}{n}\Big|\frac{\mathrm{d}u}{1-u} \\ &\leqslant \frac{3}{2n^2}\int_0^1 \frac{(\ln u)^2}{1-u}\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Exercice 3

Question 3.b

De la question **a.**, on déduit par encadrement que :

$$v_n + \frac{I}{n} = o\Big(\frac{1}{n}\Big),\qquad n \to \infty,$$

c'est-à-dire que

$$v_n \sim -\frac{I}{n},\qquad n \to \infty.$$

On déduit alors de la question **1.** que :

$$u_n - \frac{1}{2} \sim -\frac{I}{n^2},\qquad n \to \infty,$$

qui s'écrit encore :

$$u_n = \frac{1}{2} - \frac{I}{n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big),\qquad n \to \infty.$$

Exercice 4

Question 1.a

La fonction $f : t \longmapsto \mathrm{e}^{-\sqrt{|\ln t|}}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

- La fonction f est prolongeable par continuité en 0, si bien que l'intégrale $\int_{\to 0}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$ est faussement généralisée donc convergente.
- Pour $\alpha > 1$,

$$t^{\alpha} f(t) = \exp\big(\alpha \ln t + \sqrt{\ln t}\big) = \exp\big(\alpha \ln t + o(\ln t)\big) \to +\infty, \quad t \to +\infty.$$

Cela met en évidence, pour $\alpha = 1$ en particulier, que

$$0 \leqslant \frac{1}{t} = o\big(f(t)\big), \quad t \to +\infty,$$

d'où l'on déduit la divergence de l'intégrale $\int_{1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ par comparaison à l'intégrale de Riemann divergente $\int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$.

Remarque. Le deuxième point suffit pour prouver la divergence de l'intégrale $\int_{0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 4

Question 1.b

La fonction $f : t \longmapsto \sqrt[3]{t^3 + t} - t$ est continue sur $[0, +\infty[$.
Lorsque $t \to +\infty$,

$$f(t) = t\left[\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)^{1/3} - 1\right] = t\left[\frac{1}{3t^2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right)\right] \sim \frac{1}{3t} \geqslant 0,$$

si bien que l'intégrale $\int_{0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge par comparaison à l'intégrale de Riemann divergente $\int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$.

Exercice 4

Question 2

La fonction $f : t \longmapsto \frac{1}{t^2 + t\sqrt{t^2 - 1} - 1}$ est continue sur $]1, +\infty[$.

- Lorsque $t \to +\infty$,

$$t^2 + t\sqrt{t^2 - 1} - 1 = t^2 + t\big(t + o(t)\big) + o(t^2) = 2t^2 + o(t^2) \sim 2t^2$$

si bien que

$$f(t) \sim \frac{1}{2t^2} \geqslant 0, \quad t \to +\infty$$

et l'intégrale $\int_{2}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge par comparaison à l'intégrale de Riemann convergente $\int_{2}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$.

- Lorsque $t \to 1$,

$$f(t) = \frac{1}{t + \sqrt{t^2 - 1}} \frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}} \sim \frac{1}{\sqrt{(t+1)(t-1)}} \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{t - 1}} \geqslant 0,$$

d'où l'on déduit la convergence de l'intégrale $\int_{1}^{2} f(t)\,\mathrm{d}t$ par comparaison à l'intégrale de Riemann convergente $\int_{1}^{2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t-1}}$.

L'intégrale $\int_{1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est donc convergente. Le changement de variable à venir en donnera une nouvelle justification.

La fonction $\psi : t \longmapsto u = t + \sqrt{t^2 - 1}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ avec :

$$\forall t > 1, \quad \psi'(t) = 1 + \frac{t}{\sqrt{t^2 - 1}} = \frac{t + \sqrt{t^2 - 1}}{\sqrt{t^2 - 1}} > 0. \qquad (\star)$$

Elle est donc de plus strictement croissante et réalise donc une bijection de $]1, +\infty[$ sur lui-même. Puisque ψ' ne s'annule pas, la réciproque $\varphi = \psi^{-1} : u \longmapsto t$ est donc de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement croissante de $]1, +\infty[$ sur lui-même. C'est donc un changement de variable admissible, que l'on peut mener sans chercher à expliciter φ ni φ' (c'est l'intérêt de cet exemple), en écrivant abusivement $(\star)$ sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2 - 1}}.$$

Il vient alors :

$$\int_{1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t + \sqrt{t^2 - 1}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2 - 1}} = \int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = 1.$$

Exercice 4

Question 3

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln n! = \sum_{k=2}^{n} \ln k$$

où, par croissance de la fonction ln sur $[1, +\infty[$,

$$\forall k \geqslant 2, \quad \int_{k-1}^{k} \ln t\,\mathrm{d}t \leqslant \ln k \leqslant \int_{k}^{k+1} \ln t\,\mathrm{d}t$$

si bien que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_{1}^{n} \ln t\,\mathrm{d}t \leqslant \ln n! \leqslant \int_{2}^{n+1} \ln t\,\mathrm{d}t. \qquad (\star)$$

Comme

$$\int_{1}^{n} \ln t\,\mathrm{d}t = \big[t \ln t - t\big]_{1}^{n} = n \ln n - n + 1 = n \ln n + o(n \ln n) \sim n \ln n, \quad n \to \infty$$

et de même

$$\int_{2}^{n+1} \ln t\,\mathrm{d}t = (n+1)\ln(n+1) + o(n \ln n) \sim n \ln n, \quad n \to \infty,$$

on justifie par encadrement après avoir divisé tous les membres de $(\star)$ par $n \ln n$ que :

$$\ln n! \sim n \ln n, \quad n \to \infty.$$

Exercice 5

Question 1.a

Pour $i \in [\![1, n-1]\!]$, la i-ième colonne de la matrice C donne les coordonnées du vecteur $f(e_i)$ dans la base $\mathcal{B}$: ainsi $f(e_i) = e_{i+1}$.

Exercice 5

Question 1.b

On commence par démontrer par récurrence sur $j \in [\![1, n-1]\!]$ le prédicat $\mathcal{P}_j$: « $f^j(e_1) = e_{j+1}$ » :

- On a tout d'abord $f(e_1) = e_2$ d'après la question **a.** ; ainsi la propriété $\mathcal{P}_1$ est vraie.
- Puis, si la propriété $\mathcal{P}_j$ est vraie pour un entier $j < n-1$ alors, toujours d'après **a.**, $f^{j+1}(e_1) = f\big(f^j(e_1)\big) = f(e_{j+1}) = e_{j+2}$ car $j + 1 \leqslant n - 1$, et la propriété $\mathcal{P}_{j+1}$ est démontrée.

On a donc démontré que $f^j(e_1) = e_{j+1}$ pour tout $j \in [\![1, n-1]\!]$ d'après le principe de récurrence.

Par suite, toujours par lecture sur la matrice C, il vient

$$f^n(e_1) = f\big(f^{n-1}(e_1)\big) = f(e_n) = -(a_0 e_1 + a_1 e_2 + \cdots + a_{n-1} e_n).$$

Exercice 5

Question 2.a

Il résulte immédiatement des formules établies en **1.b.** que $g(e_1) = 0$.

Exercice 5

Question 2.b

Les endomorphismes f^i et g commutent comme polynômes en f :

$$g \circ f^i = f^i \circ g = f^{n+i} + a_{n-1} f^{n-1+i} + \cdots + a_1 f^{1+i} + a_0 f^i.$$

Exercice 5

Question 2.c

Il en résulte, d'après **1.b.**, que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$g(e_i) = g\big(f^{i-1}(e_1)\big) = f^{i-1}\big(g(e_1)\big) = 0.$$

Exercice 5

Question 2.d

L'endomorphisme g, nul sur les vecteurs de la base $\mathcal{B}$, est donc identiquement nul. Ainsi $P(f) = g = 0$ et P est annulateur de f.

Application 1. On en déduit que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

matrice compagnon du polynôme $X^5 - X^3 - 2X^2 - 1$, est annulée par celui-ci : $A^5 = A^3 + 2A^2 + I_5$.

Exercice 5

Question 2.e

C'est du cours : si λ est valeur propre de C, il existe un vecteur $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nul tel que $CX = \lambda X$. On démontre alors, par une récurrence simple, que $C^i X = \lambda^i X$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, si bien que

$$\begin{aligned} P(C)X &= C^n X + \sum_{i=0}^{n-1} a_i C^i X = \lambda^n X + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda^i X \\ &= \Big(\lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda^i\Big) X = P(\lambda) X. \end{aligned}$$

Comme par ailleurs $P(C) = 0$ d'après **d.** (puisque C représente f) et $X \neq 0$, on en déduit que $P(\lambda) = 0$. Ainsi les valeurs propres de C sont racines du polynôme P.

Exercice 5

Question 3.a

D'après **1.b.**,

$$Q(f)(e_1) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^i(e_1) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i e_{i+1}.$$

Exercice 5

Question 3.b

Si $Q = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i X^i$ annule f, on a $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i e_{i+1} = 0$ d'après la question **a.** d'où l'on déduit, puisque la famille $\mathcal{B}$ est libre, que $\alpha_i = 0$ pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, c'est-à-dire que $Q = 0$. Ainsi seul le polynôme nul est annulateur de f parmi les polynômes de degré inférieur ou égal à $n - 1$.

Exercice 5

Question 3.c

Il s'agit d'établir que $P(f) = (f - \lambda\,\mathrm{id}) \circ R(f)$, si tant est que ce ne soit pas évident. Or, si l'on note $P = (X - \lambda)R = Q - \lambda R$ où $Q = XR$, alors

$$(f - \lambda\,\mathrm{id}) \circ R(f) = f \circ R(f) - \lambda R(f) = Q(f) - \lambda R(f) = P(f).$$

Exercice 5

Question 3.d

Soit λ racine de P. D'après la question **c.**, il existe alors un polynôme R de degré inférieur ou égal à $n-1$ tel que $(f-\lambda\,\mathrm{id})\circ R(f)=0$. Si λ n'est pas valeur propre de f, alors $f-\lambda\,\mathrm{id}$ est inversible et la relation précédente implique donc $R(f)=0$, qui implique à son tour $R=0$ d'après la question **b.** puis $P=0$, ce qui est en contradiction avec la définition de P. C'est donc que λ est valeur propre de f.
Ainsi toute racine de P est valeur propre de f.

Exercice 5

Question 4.a

Pour $x\in\mathbb{R}$, on a :

$$C-xI_n=\begin{pmatrix} -x & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0\\ 1 & -x & \ddots & (0) & \vdots & -a_1\\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots\\ \vdots & (0) & \ddots & \ddots & -x & -a_{n-2}\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1}-x \end{pmatrix}.$$

Pour montrer que la matrice précédente est de rang supérieur ou égal à $n-1$, il suffit de justifier que les $n-1$ premières colonnes sont linéairement indépendantes. On peut simplement faire remarquer qu'elles forment une famille échelonnée donc libre. Un argument peut-être un peu plus précis peut consister à faire observer qu'en ajoutant à gauche le premier vecteur de la base canonique, on obtient une matrice triangulaire à coefficients diagonaux non nuls donc inversible ; ainsi ses vecteurs colonnes forment une famille libre.

Si λ est valeur propre de C, alors $C-\lambda I_n$ n'est pas inversible donc, d'après ce qui précède, $n-1\leqslant \mathrm{rg}(C-\lambda I_n)<n$ c'est-à-dire $\mathrm{rg}(C-\lambda I_n)=n-1$. Dans ces conditions, le théorème du rang appliqué à l'endomorphisme $f-\lambda\,\mathrm{id}$ assure que le sous-espace propre $E_\lambda(C)$ de C pour la valeur propre λ a pour dimension

$$\begin{aligned}\dim E_\lambda(C)&=\dim E_\lambda(f)=\dim \mathrm{Ker}(f-\lambda\,\mathrm{id})\\ &=n-\mathrm{rg}(f-\lambda\,\mathrm{id})=n-\mathrm{rg}(C-\lambda I_n)=1.\end{aligned}$$

Exercice 5

Question 4.b

Par théorème, la matrice C est diagonalisable si, et seulement si, la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à n. Or chacun de ces sous-espaces est de dimension 1 d'après la question **a.**. La somme de leurs dimensions est donc égale au nombre de ces sous-espaces, c'est-à-dire au nombre de valeurs propres de C. Comme les valeurs propres de C sont exactement les racines du polynôme P d'après les questions **2.e.** et **3.d.**, on en déduit donc que la matrice C est diagonalisable si, et seulement si, P admet n racines deux-à-deux distinctes.

Exercice 5

Question 5.a

La matrice A_1 est la matrice compagnon du polynôme

$$P_1=X^4-1=(X-1)(X+1)(X-\mathbf{i})(X+\mathbf{i})$$

de degré 4. Ce dernier admettant 4 racines deux-à-deux distinctes, la matrice A_1 est diagonalisable d'après la question **4.b.**.

Exercice 5

Question 5.b

La matrice A_2 est la matrice compagnon du polynôme

$$P_2=X^4-2X^3-3X^2+8X-4.$$

Puisque 1 en est racine évidente, le polynôme P_2 se factorise par $X-1$:

$$P_2=(X-1)(X^3-X^2-4X+4)$$

puis l'on peut à nouveau factoriser le facteur de droite par $X-1$. Ainsi 1 est racine multiple de P_2 qui ne peut donc admettre 4 racines deux-à-deux distinctes.
Par suite, la matrice A_2 n'est pas diagonalisable d'après **4.b.**.

Exercice 5

Question 6.a

Pour $t\in\mathbb{C}$, les matrices $M=B-tI_n$ et $C-tI_n$ sont transposées l'une de l'autre. Il s'agit donc de démontrer que M est inversible si, et seulement si, ${}^tM$ est inversible. C'est une propriété du cours : si M est inversible alors, en transposant la relation $MM^{-1}=M^{-1}M=I_n$, on obtient ${}^t(M^{-1}){}^tM={}^tM{}^t(M^{-1})=I_n$, d'où l'on déduit que ${}^tM$ est inversible, d'inverse $({}^tM)^{-1}={}^t(M^{-1})$ ce qui démontre une implication. En appliquant ce résultat à ${}^tM$, on obtient la réciproque.

Exercice 5

Question 6.b

Un complexe λ est valeur propre de B si, et seulement si, la matrice $B-\lambda I_n$ n'est pas inversible ce qui signifie, d'après **a.**, que la matrice ${}^t(B-\lambda I_n)=C-\lambda I_n$ n'est pas inversible ou encore que λ est valeur propre de C. Les matrices B et C ont donc mêmes valeurs propres.

Exercice 5

Question 6.c

Puisque le complexe λ est valeur propre de B donc de C d'après **b.**, il est aussi racine de P d'après **2.e.**. On pose alors les équations du sous-espace propre $E_\lambda(B)$ de B pour la valeur propre λ : pour $X = {}^t\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$,

$$BX = \lambda X \iff \begin{cases} -\lambda x_1 + x_2 = 0 \\ -\lambda x_2 + x_3 = 0 \\ \quad \vdots \\ -\lambda x_{n-1} + x_n = 0 \\ -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \cdots - a_{n-1} x_n - \lambda x_n = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda^2 x_1 \\ \quad \vdots \\ x_n = \lambda^{n-1} x_1 \\ -a_0 x_1 - a_1 \lambda x_1 - \cdots - a_{n-1} \lambda^{n-1} x_1 - \lambda^n x_1 = 0 \end{cases}.$$

La dernière ligne s'écrit encore $P(\lambda)x_1 = 0$ et est donc automatiquement satisfaite puisque $P(\lambda) = 0$. Le sous-espace propre $E_\lambda(B)$ est donc la droite dirigée par le vecteur ${}^t\begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \cdots & \lambda^{n-1} \end{pmatrix}$.

Exercice 5

Question 6.d

Si P admet n racines $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ deux-à-deux distinctes, ce sont autant de valeurs propres de C d'après **3.d.** donc de B d'après **b.**. Dans ces conditions, la matrice B est diagonalisable.

Les colonnes de la matrice V, propres pour B d'après **c.** associées à des valeurs propres deux-à-deux distinctes, forment une famille libre de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. La matrice carrée V est donc inversible et l'on a, d'après la formule de changement de base appliquée à l'endomorphisme canoniquement associé à B :

$$V^{-1}BV = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Exercice 5

Question 7.a

Par théorème, si l'endomorphisme u présente n valeurs propres deux-à-deux distinctes en dimension n, alors il est diagonalisable.

Exercice 5

Question 7.b

On montre par récurrence sur $i \in [\![0, n-1]\!]$ que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $u^i(\varepsilon_j) = \mu_j^i \varepsilon_j$. On a donc :

$$\forall i \in [\![0, n-1]\!], \quad u^i(a) = u_i\Big(\sum_{j=1}^n \varepsilon_j\Big) = \sum_{j=1}^n u^i(\varepsilon_j) = \sum_{j=1}^n \mu_j^i \varepsilon_j.$$

La famille $\mathcal{B}_a$ est donc représentée en base $\underline{\varepsilon}$ par la matrice

$$W = \begin{pmatrix} 1 & \mu_1 & \mu_1^2 & \cdots & \mu_1^{n-1} \\ 1 & \mu_2 & \mu_2^2 & \cdots & \mu_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \mu_n & \mu_n^2 & \cdots & \mu_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Comme ${}^tW$ est inversible d'après **6.d.** puisque $\mu_1, \ldots, \mu_n$ sont deux-à-deux distincts, sa transposée W l'est aussi d'après **6.a.** et la famille $\mathcal{B}_a$ est donc une base de E.

Exercice 5

Question 7.c

Pour tout $j \in [\![1, n-1]\!]$, on a $u\big(u^{j-1}(a)\big) = u^j(a)$, d'où l'on déduit les $n-1$ premières colonnes de la matrice de u dans la base $\mathcal{B}_a$, qui est donc de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \beta_0 \\ 1 & \ddots & & (0) & \vdots & \beta_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & \ddots & 0 & \beta_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \beta_{n-1} \end{pmatrix}.$$

C'est donc la matrice compagnon du polynôme

$$P_1 = X^n - \beta_{n-1}X^{n-1} - \cdots - \beta_1 X - \beta_0.$$

Exercice 6

Question 1.a

L'application Φ_A est clairement linéaire :

$\forall M, N \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$

$$\begin{aligned} \Phi_A(\lambda M + N) &= A(\lambda M + N) - (\lambda M + N)A \\ &= \lambda(AM - MA) + (AN - NA) \\ &= \lambda \Phi_A(M) + \Phi_A(N) \end{aligned}$$

et à valeurs dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, c'est donc un endomorphisme de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 6

Question 1.b

Il vient $\Phi_A(I_n) = 0$, si bien que $\operatorname{Ker} \Phi_A$ n'est pas réduit à $\{0\}$. L'application linéaire Φ_A n'est donc pas injective, et par suite pas surjective puisqu'il s'agit d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie.

Exercice 6

Question 2.a

La matrice A étant triangulaire, elle admet ses coefficients diagonaux pour valeurs propres : 1 et 3. Carrée d'ordre 2 avec 2 valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable.

Exercice 6

Question 2.b

Le calcul de

$$\Phi_A(E_{1,1}) = -E_{1,2}, \quad \Phi_A(E_{1,2}) = -2E_{1,2},$$
$$\Phi_A(E_{2,1}) = E_{1,1} + 2E_{2,1} - E_{2,2} \quad \text{et} \quad \Phi_A(E_{2,2}) = E_{1,2}$$

conduit à la matrice représentant Φ_A en base $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est de rang 2 car, en notant C_1, C_2, C_3, C_4 ses colonnes, on a $C_1 = -C_4$, $C_2 = -2C_4$ et par ailleurs (C_3, C_4) libre.

Exercice 6

Question 2.c

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{rg}(H - \lambda I_4) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\lambda \end{pmatrix}$$
$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - \lambda L_1 \\ L_1 \leftrightarrow L_2}}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -1 & -\lambda-2 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda^2+2\lambda & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$
$$= \begin{cases} 4 & \text{si } \lambda \notin \{-2, 0, 2\} \\ 3 & \text{si } \lambda \in \{-2, 2\} \\ 2 & \text{si } \lambda = 0 \end{cases}$$

si bien que H admet pour valeurs propres -2, 0 et 2.

Le théorème du rang donne par ailleurs :

$$\forall \lambda \in \operatorname{Sp} H, \quad \dim E_\lambda(H) = 4 - \operatorname{rg}(H - \lambda I_4),$$

si bien que $E_0(H)$ est de dimension 2 alors que $E_{-2}(H)$ et $E_2(H)$ sont de dimension 1.
Ainsi la somme des dimensions des sous-espaces propres de H, carrée d'ordre 4, est-elle égale à 4, ce qui signifie que H est diagonalisable.

L'endomorphisme Φ_A, représenté par H, est donc également diagonalisable avec -2, 0 et 2 pour valeurs propres.

Exercice 6

Question 3.a

Sachant A diagonalisable, il existe $P \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ inversible et $D \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que $P^{-1}AP = D$. En transposant la relation, il vient ${}^tP{}^tA{}^tP^{-1} = {}^tD = D$, si bien que ${}^tA$ est semblable à D donc est diagonalisable.
Les matrices A et ${}^tA$, toutes deux semblables à D, ont alors les mêmes valeurs propres : celles de D, c'est-à-dire ses coefficients diagonaux.

Exercice 6

Question 3.b

On note $X = {}^t\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$ et $Y = {}^t\begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix}$ les deux colonnes propres considérées, ainsi que λ et μ les valeurs propres associées.

D'une part, $M = X{}^tY$ est une matrice non nulle de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ car elle a pour coefficient générique $m_{i,j} = x_i y_j$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Sachant les colonnes X et Y non nulles, il existe $i_0, j_0 \in [\![1, n]\!]$ tels que $x_{i_0} \neq 0$ et $y_{j_0} \neq 0$ et alors $m_{i_0,j_0} \neq 0$.

D'autre part, le calcul montre que

$$\Phi_A(M) = (AX){}^tY - X{}^t({}^tAY) = \lambda X{}^tY - \mu X{}^tY = (\lambda - \mu)M.$$

La matrice M est donc vecteur propre de l'endomorphisme Φ_A.

Exercice 6

Question 3.c

Soient $i, j \in [\![1, n]\!]$.

Puisque $(X_1, \ldots, X_n)$ est une base de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que $V_i = \sum_{k=1}^n \alpha_k X_k$.
Il existe de même $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$ tels que $V_j = \sum_{\ell=1}^n \beta_\ell Y_\ell$.
On a alors :

$$V_i{}^tV_j = \sum_{1 \leqslant k, \ell \leqslant n} \alpha_k \beta_\ell X_k{}^tY_\ell.$$

Puisque les vecteurs $V_i{}^tV_j$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, composent la base canonique de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, il en ressort que la famille $\mathcal{F}$ engendre l'espace vectoriel $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Formée de $n^2 = \dim \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ vecteurs, c'en est donc une base.

Exercice 6

Question 3.d

La matrice A étant diagonalisable par hypothèse, il existe une base $(X_1, \ldots, X_n)$ de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de colonnes propres de A. Il existe de même d'après **a.** une base $(Y_1, \ldots, Y_n)$ de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de colonnes propres de ${}^tA$.
Dans ces conditions, les questions **b.** et **c.** assurent que la famille $(X_i{}^tY_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est une base de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de l'endomorphisme Φ_A, qui est donc diagonalisable.

Exercice 6

Question 3.e

On conserve les notations de la question précédente, et l'on note de plus $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (resp. $\mu_1, \ldots, \mu_n$) les valeurs propres de A (resp. de ${}^tA$) associées aux colonnes propres $X_1, \ldots, X_n$ (resp. $Y_1, \ldots, Y_n$).

D'après les questions **b.** et **d.**, les matrices $X_i{}^tY_j$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, sont des vecteurs propres de Φ_A pour les valeurs propres $\lambda_i - \mu_j$, qui forment une base de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Sachant que A et ${}^tA$ ont mêmes valeurs propres d'après **a.**, les valeurs propres de Φ_A sont donc les réels de la forme $\lambda - \mu$, où λ et μ sont des valeurs propres de A.

Exercice 6

Question 4.a

Le résultat est immédiat pour $k = 1$: $\Phi_A(T) = \lambda T$ par hypothèse.
S'il est acquis à un entier $k \in \mathbb{N}^*$, alors

$$\begin{aligned}\Phi_A(T^{k+1}) &= AT^{k+1} - T^{k+1}A = \left(\Phi_A(T^k) + T^kA\right)T - T^{k+1}A \\ &= \lambda k T^{k+1} + T^k\Phi_A(T) = \lambda(k+1)T^{k+1}.\end{aligned}$$

Exercice 6

Question 4.b

Si T^k était non nul pour tout $k \in \llbracket 0, n^2 \rrbracket$, la famille $(T^k)_{0 \leqslant k \leqslant n^2}$ serait formée de vecteurs propres de Φ_A pour des valeurs propres deux-à-deux distinctes (car $\lambda \neq 0$) d'après **a.**. Elle serait donc libre, alors qu'elle est formée de $n^2 + 1 > \dim \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ vecteurs, ce qui est absurde.
Il existe donc un entier $q \leqslant n^2$ tel que $T^q = 0$. Un tel entier est nécessairement non nul car $T^0 = I_n \neq 0$.

Exercice 6

Question 4.c

Si l'on avait $T^{p-1}X = 0$ pour tout $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors la matrice T^{p-1}, qui représente l'endomorphisme $X \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \longmapsto T^{p-1}X$ en base canonique, serait nulle, en contradiction avec la définition de p. C'est donc qu'il existe $X_0 \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $T^{p-1}X_0 \neq 0$. Pour tout $k \geqslant p$, on a en revanche $T^kX_0 = 0$.

Étant donnés $\alpha_0, \ldots, \alpha_{p-1} \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{i=0}^{p-1} T^iX_0 = 0$, on montre alors par récurrence forte sur $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ que $\alpha_k = 0$:

- Tout d'abord, $\alpha_0 T^{p-1}X_0 = T^{p-1}\sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i T^iX_0 = 0$, d'où l'on déduit que $\alpha_0 = 0$ puisque $T^{p-1}X_0 \neq 0$.
- Si $\alpha_0 = \cdots = \alpha_k = 0$ pour un entier $k < p - 1$, alors
$$\alpha_{k+1}T^{p-1}X_0 = T^{p-1-k-1}\sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i T^iX_0 = 0,$$
d'où il ressort de même que $\alpha_{k+1} = 0$.

Remarque. On peut aussi raisonner par l'absurde et mener le même type de raisonnement à partir du plus petit entier k pour lequel $\alpha_k \neq 0$ afin d'obtenir une contradiction.

Le famille $(X_0, TX_0, \ldots, T^{p-1}X_0)$, formée de p vecteurs, étant libre dans l'espace $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de dimension n, on a nécessairement $p \leqslant n$.

Exercice 6

Question 5.a

On rappelle que le produit scalaire canonique sur $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ est défini par les deux expressions suivantes : pour $M = (m_{i,j})$, $N = (n_{i,j}) \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\langle M, N \rangle = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} m_{i,j}n_{i,j} = \operatorname{tr}({}^tMN).$$

Pour $M, N \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, on a par propriété de la trace (HP, à redémontrer ?) :

$$\left\langle M{}^tN, I_n \right\rangle = \operatorname{tr}\left({}^t(M{}^tN)I_n\right) = \operatorname{tr}(N{}^tM) = \operatorname{tr}({}^tMN) = \langle M, N \rangle .$$

Exercice 6

Question 5.b

La matrice P étant orthogonale, ses colonnes forment une base orthonormale de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ euclidien canonique :

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad {}^tC_iC_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} .$$

Exercice 6

Question 5.c

En notant $P = (p_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, on a :

$$\forall k, \ell \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad (C_i{}^tC_j)_{k,\ell} = p_{k,i}p_{\ell,j}.$$

Il vient alors :

$$\left\langle C_i{}^tC_j, I_n \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} (C_i{}^tC_j)_{k,k} = \sum_{k=1}^{n} p_{k,i}p_{k,j} = {}^tC_iC_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \delta_{i,j}.$$

Remarque. Inutile d'en revenir aux coefficients : en utilisant les propriétés de la trace, on obtient directement

$$\left\langle C_i{}^tC_j, I_n \right\rangle = \operatorname{tr}\left({}^t(C_i{}^tC_j)I_n\right) = \operatorname{tr}(C_j{}^tC_i) = \operatorname{tr}({}^tC_iC_j) = {}^tC_iC_j.$$

Exercice 6

Question 5.d

D'après **a.** et **b.** et **c.**, il vient par exportativité des scalaires :

$$\begin{aligned}\left\langle C_i{}^tC_j, C_k{}^tC_\ell\right\rangle &= \left\langle C_i{}^tC_j{}^t(C_k{}^tC_\ell), I_n\right\rangle = \left\langle C_i({}^tC_jC_\ell){}^tC_k, I_n\right\rangle \\ &= ({}^tC_jC_\ell)\left\langle C_i{}^tC_k, I_n\right\rangle = \delta_{j,\ell}\delta_{i,k} = \begin{cases}1 & \text{si } (i,j)=(k,\ell) \\ 0 & \text{sinon}\end{cases} \quad .\end{aligned}$$

Exercice 6

Question 5.e

La famille $\mathcal{G}$ est orthonormale d'après **d.** donc libre. Formée de $n^2 = \dim \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ vecteurs, c'est donc une base orthonormale de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.
Par ailleurs, la formule de changement de base permet de réinterpréter l'identité $P^{-1}AP = D$ diagonale : les colonnes $C_1, \ldots, C_n$ sont propres pour A et donc aussi pour ${}^tA = A$. Dans ces conditions, la question **3.b.** assure que les matrices $C_i{}^tC_j$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, sont autant de vecteurs prores de Φ_A.

On retrouve donc ainsi le fait que l'endomorphisme Φ_A est diagonalisable... et même un peu plus ici : il est symétrique car représenté par une matrice diagonale donc symétrique dans une base orthonormale.

Exercice 7

Question 1.a

On admet que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$. Elle admet donc un développement limité à tout ordre N au voisinage de 0, donné par la formule de Taylor-Young :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n + o(t^N), \quad t \to 0,$$

mais qui peut aussi être calculé à partir des développements usuels :

$$\left.\begin{aligned} f(t) &= \frac{\ln(1+t)}{t} = \frac{1}{t}\left(\sum_{n=1}^{N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} t^n + o(t^{N+1})\right) \\ &= \sum_{n=1}^{N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} t^{n-1} + o(t^N) = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n+1} t^n + o(t^N)\end{aligned}\right. \quad t \to 0.$$

Par unicité du développement limité, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f^{(n)}(0) = (-1)^n \frac{n!}{n+1}.$$

Exercice 7

Question 1.b

La fonction f est continue sur $]-1, 0]$. Le changement de variable affine $t = -1 + u$ i.e. $u = t + 1 \to 0$ lorsque $t \to -1$ préserve la nature de l'intégrale. Or

$$0 \leqslant f(t) = \frac{\ln u}{u-1} \sim -\ln u = o\Big(\frac{1}{\sqrt{u}}\Big), \quad u \to 0,$$

d'où l'on déduit la convergence des intégrales $\int_0^1 \ln u \,\mathrm{d}u$ et donc $\int_{-1}^0 f(t)\,\mathrm{d}t$ par comparaison à l'intégrale de Riemann convergente $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}}$.

La fonction f est également continue sur $[0, +\infty[$. Mais

$$tf(t) = \ln(1+t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty,$$

d'où l'on déduit que

$$0 \leqslant \frac{1}{t} = o\big(f(t)\big), \quad t \to +\infty$$

et par suite que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge par comparaison à l'intégrale divergente $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$.

Exercice 7

Question 2.a

La fonction f étant continue sur $]-1, +\infty[$, son intégrale converge sur tout segment $[0, x] \subset]-1, +\infty[$ de sorte que g est définie sur $]-1, +\infty[$. Puisque l'intégrale $\int_{-1}^0 f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente d'après la question **1.b.**, on peut étendre le domaine de définition de g à $[-1, +\infty[$.
La continuité de g en -1 résulte alors de la définition de l'intégrale généralisée convergente : par convergence de l'intégrale précédente,

$$g(-1) = -\int_{-1}^0 f(t)\,\mathrm{d}t = -\lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \int_x^0 f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} g(x).$$

Exercice 7

Question 2.b

Puisque f est continue sur $]-1, +\infty[$, la fonction g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1, +\infty[$ de dérivée $g' = f$.

Exercice 7

Question 2.c

La fonction

$$k : x \longmapsto g(x) + g\Big(\frac{1}{x}\Big) - \frac{1}{2}(\ln x)^2$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ d'après la question **b.**, de dérivée

$$k' : x \longmapsto f(x) - \frac{1}{x^2} f\Big(\frac{1}{x}\Big) - \frac{\ln x}{x}.$$

Mais, par un calcul élémentaire,

$$\forall x > 0, \qquad f\Big(\frac{1}{x}\Big) = x \ln\Big(1 + \frac{1}{x}\Big) = x\big(\ln(1+x) - \ln x\big) = x^2 f(x) - x\ln x,$$

ce qui conduit à $k'(x) = 0$ pour tout $x > 0$. La fonction k est donc constante sur l'intervalle $]0, +\infty[$, égale à sa valeur en 1 : $k(1) = 2g(1) = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 7

Question 2.d

D'après la question **c.** et la continuité de g en 0, justifiée à la question **b.**, il vient :

$$\left.\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{2}(\ln x)^2 - g\Big(\frac{1}{x}\Big) + \frac{\pi^2}{6} \\ &= \frac{1}{2}(\ln x)^2 - g(0) + \frac{\pi^2}{6} + o(1) \\ &= \frac{1}{2}(\ln x)^2 + o\big((\ln x)^2\big) \sim \frac{1}{2}(\ln x)^2 \end{aligned}\right. \quad , \qquad x \to +\infty.$$

Exercice 7

Question 3.a

La fonction $t \longmapsto \frac{u(t)v(t)}{1+t^2}$ est tout d'abord continue sur $]0, +\infty[$ par opérations sur les fonctions continues. De plus, l'inégalité arithmético-géométrique donne

$$\forall t > 0, \qquad \left|\frac{u(t)v(t)}{1+t^2}\right| \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{u(t)^2}{1+t^2} + \frac{v(t)^2}{1+t^2}\right)$$

d'où l'on tire la convergence absolue de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{u(t)v(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ puisque $u, v \in E$.

Exercice 7

Question 3.b

La fonction nulle est bien sûr élément de E. Par ailleurs, étant donnés $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction

$$t \longmapsto \frac{\big(u(t) + \lambda v(t)\big)^2}{1+t^2} = \frac{u(t)^2}{1+t^2} + 2\lambda\frac{u(t)v(t)}{1+t^2} + \lambda^2\frac{v(t)^2}{1+t^2}$$

est continue et son intégrale sur $]0, +\infty[$ est convergente comme combinaison linéaire d'intégrales convergentes d'après la question **a.**. L'ensemble E est donc un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathscr{C}(]0, +\infty[, \mathbb{R})$ est fonctions réelles continues sur $]0, +\infty[$.

Exercice 7

Question 3.c

La question **b.** assure que la formule de l'énoncé fait sens. La bilinéarité de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ résulte immédiatement de la linéarité de l'intégrale généralisée convergente et la symétrie est triviale. Pour $u \in E$, on a

$$\langle u, u \rangle = \int_0^{+\infty} \frac{u(t)^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

Enfin, si $\langle u, u \rangle = 0$, alors la fonction $t \longmapsto \frac{u(t)^2}{1+t^2}$ continue, positive et d'intégrale nulle sur $]0, +\infty[$, est identiquement nulle sur cet intervalle, de sorte que $u = 0$. Toutes les conditions sont donc réunies pour faire de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur E.

Exercice 7

Question 4.a

La fonction $t \longmapsto \frac{h_k(t)}{1+t^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$. On établit la convergence absolue de son intégrale sur cet intervalle par comparaison aux intégrales de Riemann en remarquant que :

$$\frac{h_k(t)}{1+t^2} \sim (\ln t)^k = o\Big(\frac{1}{\sqrt{t}}\Big), \quad t \to 0$$

et

$$\frac{h_k(t)}{1+t^2} \sim \frac{(\ln t)^k}{t^2} = o\Big(\frac{1}{t^{3/2}}\Big), \quad t \to +\infty.$$

Exercice 7

Question 4.b

D'après les questions **2.b.** et **2.d.**, la fonction g est continue sur $[0, +\infty[$ avec :

$$\frac{g(t)^2}{1+t^2} \sim \frac{1}{4}\frac{h_4(t)}{1+t^2} \geqslant 0, \qquad t \to +\infty.$$

On en déduit la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{g(t)^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ d'après la question **a.**.

Il suffit alors d'appliquer le résultat de la question **3.a.** aux fonctions g et h_0 de E pour obtenir la convergence absolue de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{g(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 7

Question 4.c

Pour $k \in \mathbb{N}$, la fonction h_k est continue sur $]0, +\infty[$ et l'intégrale de la fonction

$$t \longmapsto \frac{h_k(t)^2}{1+t^2} = \frac{h_{2k}(t)}{1+t^2}$$

sur $]0, +\infty[$ converge d'après la question **a.**, ce qui suffit à assurer que h_k appartient à E.

Si j et k sont deux entiers naturels dont la somme est impaire, alors le changement de variable $x \longmapsto t = \frac{1}{x}$, strictement décroissant et de classe $\mathscr{C}^1$ de $]0, +\infty[$ sur lui-même, donne :

$$\begin{aligned}\langle h_j, h_k \rangle &= \int_0^{+\infty} \frac{(\ln t)^{j+k}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{(\ln \frac{1}{x})^{j+k}}{1+\frac{1}{x^2}}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}\\ &= \int_0^{+\infty} \frac{(-\ln x)^{j+k}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = -\langle h_j, h_k \rangle,\end{aligned}$$

d'où l'on tire $\langle h_j, h_k \rangle = 0$.

Exercice 7

Question 5.a

Pour $u \in E$, la fonction $s(u) : t \longmapsto u(\frac{1}{t})$ est continue sur $]0, +\infty[$. Le changement de variable $x = \frac{1}{t}$ (dont la validité a déjà été justifiée) préserve la nature de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\big(s(u)\big)(t)^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{u(\frac{1}{t})^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{u(x)^2}{1+\frac{1}{x^2}}\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \int_0^{+\infty} \frac{u(x)^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x,$$

qui est donc convergente puisque $u \in E$, si bien que $s(u) \in E$. L'application s est donc à valeurs dans E.

Par ailleurs, pour $u, v \in E$,

$$\begin{aligned}\forall t > 0, \quad \big(s(\lambda u + v)\big)(t) &= (\lambda u + v)\Big(\frac{1}{t}\Big) = \lambda u\Big(\frac{1}{t}\Big) + v\Big(\frac{1}{t}\Big)\\ &= \big(\lambda s(u)\big)(t) + \big(s(v)\big)(t)\end{aligned}$$

ce qui donne $s(\lambda u + v) = \lambda s(u) + s(v)$ et l'application s est donc linéaire : c'est un endomorphisme de E. Enfin, pour $u \in E$,

$$\forall t > 0, \quad \big(s \circ s(u)\big)(t) = \big(s(u)\big)\Big(\frac{1}{t}\Big) = u(t)$$

d'où l'on déduit que $s \circ s(u) = u$ et donc que $s \circ s = \mathrm{id}_E$. L'endomorphisme s est donc une symétrie de E.

Exercice 7

Question 5.b

Puisque s est une symétrie de E, les sous-espaces vectoriels

$$\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E) = \left\{ u \in E : \forall t > 0, u\left(\frac{1}{t}\right) = u(t) \right\} = F$$

et

$$\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E) = \left\{ u \in E : \forall t > 0, u\left(\frac{1}{t}\right) = -u(t) \right\} = G$$

sont supplémentaires dans E.

Exercice 7

Question 5.c

Le même changement de variable qu'en **5.a.** donne :

$$\forall (u, v) \in E^2, \qquad \langle s(u), s(v) \rangle = \langle u, v \rangle .$$

Exercice 7

Question 5.d

Dès lors, pour $u \in F$ et $v \in G$, $\langle u, v \rangle = \langle s(u), -s(v) \rangle = -\langle u, v \rangle$ d'où l'on tire $\langle u, v \rangle = 0$, ce qui prouve que les sous-espaces vectoriels F et G sont orthogonaux.

Exercice 7

Question 6.a

On a la relation classique $s = 2p - \mathrm{id}_E$.

Exercice 7

Question 6.b

D'après les questions **a.** et **2.c.**, le projeté de g est donné par :

$$p(g) = \frac{1}{2}\left(g + s(g)\right) : t \longmapsto \frac{1}{2}\left(g(t) + g\left(\frac{1}{t}\right)\right) = \frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{4}(\ln t)^2$$

soit $p(g) = \alpha h_0 + \beta h_2$ avec $\alpha = \frac{\pi^2}{12}$ et $\beta = \frac{1}{4}$.

Exercice 7

Question 7

Puisque $h_0 \in F$ et $g - p(g) \perp F$, on a $\langle h_0, g - \alpha h_0 - \beta h_2 \rangle = 0$ d'où l'on tire :

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{g(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \langle h_0, g \rangle = \alpha \langle h_0, h_0 \rangle + \beta \langle h_0, h_2 \rangle = \alpha \frac{\pi}{2} + \beta I = \frac{7\pi^3}{96}.$$