Algèbre linéaire

Quelques exercices corrigés

Premier exercice

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les sous-espaces vectoriels F et G donnés par les équations ci-dessous :

$$\mathrm{F} : x + 2y - 3z = 0 \qquad\qquad \mathrm{G} : \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 3x - 2y + 4z = 0 \end{cases}.$$

On note $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. **a.** Déterminer une base de F.
b. Déterminer une base de G.

2. Démontrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

3. **a.** Justifier que les vecteurs obtenus en **1.** forment une base $\underline{e}$ de $\mathbb{R}^3$.
b. Déterminer la matrice de passage P de la base $\underline{\varepsilon}$ à la base $\underline{e}$.
c. Calculer P^{-1}.

4. On considère la symétrie s de $\mathbb{R}^3$ par rapport à F et parallèlement à G.
a. Déterminer la matrice A représentant s en base $\underline{e}$.
b. En déduire la matrice B représentant s en base $\underline{\varepsilon}$.

Deuxième exercice

On note $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et l'on admet que les vecteurs

$$e_1 = (1, 1, 1), \quad e_2 = (1, -1, 0) \quad \text{et} \quad e_3 = (1, 0, 1)$$

forment une base $\underline{e}$ de $\mathbb{R}^3$. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ représenté en base $\underline{e}$ par la matrice

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. **a.** Exprimer les vecteurs $f(e_1), f(e_2)$ et $f(e_3)$ sous la forme $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$.
b. Calculer de même $f^2(e_1)$ puis $f^3(e_1)$.

2. **a.** Déterminer la matrice de passage P de la base canonique à la base $\underline{e}$.
b. Exprimer la matrice B représentative de f en base canonique en fonction de A et P.
c. Calculer P^{-1}.
d. En déduire l'expression explicite de B.

3. Déterminer $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que $\alpha f^2 + \beta f + \gamma\,\mathrm{id} = 0$.

Troisième exercice

Soit $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$ l'application linéaire canoniquement associée à la matrice

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & -1 & 7 & -1 \\ 3 & 0 & 8 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & -7 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{5,4}(\mathbb{R}).$$

1. **a.** Préciser les valeurs de p et q.
b. Déterminer l'expression analytique de

$$f : (x_1, \ldots, x_p) \longmapsto (y_1, \ldots, y_q),$$

c'est-à-dire exprimer $y_1, \ldots, y_q$ en fonction de $x_1, \ldots, x_p$.

2. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$.

3. **a.** En déduire la dimension de $\operatorname{Im} f$.

b. Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$.

c. Déterminer un système d'équations cartésiennes de $\operatorname{Im} f$.

Algèbre linéaire

Eléments de correction

Premier exercice

1. **a.** Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$(x, y, z) \in \mathrm{F} \iff x = -2y + 3z \iff (x, y, z) = y(-2, 1, 0) + z(3, 0, 1).$$

Les vecteurs $e_1 = (-2, 1, 0)$ et $e_2 = (3, 0, 1)$ forment donc une famille génératrice de F. Ils sont par ailleurs linéairement indépendants donc en forment une base.

b. Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$(x, y, z) \in \mathrm{G} \iff \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 3x - 2y + 4z = 0 \end{cases} \underbrace{\iff}_{\mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 + 2\mathrm{L}_1} \begin{cases} y = 2z \\ x = 0 \end{cases} \iff (x, y, z) = z(0, 2, 1).$$

Le vecteur $e_3 = (0, 2, 1)$ forme donc une base de G.

2. La somme de F et G est directe car un vecteur de G, qui s'écrit sous la forme $\lambda e_3 = (0, 2\lambda, \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, ne vérifie l'équation de F que pour $\lambda = 0$.
Par ailleurs $\dim \mathrm{F} + \dim \mathrm{G} = 3$ d'après **1.**, ce qui suffit à assurer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

3. **a.** D'après **1.**, (e_1, e_2) est une base de F et (e_3) en est une de G. Comme les sous-espaces F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$ d'après **2.**, la famille (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

b. On a par définition

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

c. Pour $\mathrm{X} = {}^t\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Y} = {}^t\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$ dans $\mathbf{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on inverse le système $\mathrm{Y} = \mathrm{PX}$. En choisissant successivement comme pivot x_1 sur la deuxième ligne puis x_2 sur la troisième, il vient :

$$\mathrm{Y} = \mathrm{PX} \iff \begin{cases} -2x_1 + 3x_2 = y_1 \\ x_1 + 2x_3 = y_2 \\ x_2 + x_3 = y_3 \end{cases} \underset{\mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 + 2\mathrm{L}_2}{\iff} \begin{cases} 3x_2 + 4x_3 = y_1 + 2y_2 \\ x_1 + 2x_3 = y_2 \\ x_2 + x_3 = y_3 \end{cases}$$

$$\underset{\mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L1} - 3\mathrm{L}_2}{\iff} \begin{cases} x_3 = y_1 + 2y_2 - 3y_3 \\ x_1 + 2x_3 = y_2 \\ x_2 + x_3 = y_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x_3 = y_1 + 2y_2 - 3y_3 \\ x_1 = -2y_1 - 3y_2 + 6y_3 \\ x_2 = -y_1 - 2y_2 + 4y_3 \end{cases}.$$

L'inverse de P se lit sur le dernier système (attention à l'ordre des lignes) :

$$\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 6 \\ -1 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

4. **a.** Puisque e_1 et e_2 appartiennent à F, on a $s(e_1) = e_1$ et $s(e_2) = e_2$. Le vecteur e_3 appartient quant à lui à G et a donc pour image $s(e_3) = -e_3$. On en déduit la matrice de s en base $\underline{e}$:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

b. Les matrices A et B, représentant respectivement l'endomorphisme s dans les bases $\underline{e}$ et $\underline{\varepsilon}$, sont liées par la formule $\mathrm{A} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{BP}$ où P est la matrice de passage de $\underline{\varepsilon}$ à $\underline{e}$. Le calcul donne alors :

$$\mathrm{B} = \mathrm{PAP}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & -7 & 12 \\ -2 & -4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Deuxième exercice

1. a. Il vient $f(e_1) = 2e_1 - e_2 + e_3 = (2,3,3)$ et de même $f(e_2) = (2,-3,0)$ puis $f(e_3) = (2,0,3)$.
Remarque. En notant P la matrice de passage de la base canonique à la base $\underline{e}$ (cf. question **c.**), les colonnes de la matrice $(\mathrm{P}^{-1})^{-1}\mathrm{A} = \mathrm{PA}$ donnent le résultat car cette matrice représente l'application linéaire f en bases $\underline{e}$ au départ et $\underline{\varepsilon}$ à l'arrivée.

b. Les coordonnées du vecteur $f^2(e_1)$ en base $\underline{e}$ sont données par

$$\mathrm{A}\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-5\\5\end{pmatrix}$$

si bien que $f^2(e_1) = 4e_1 - 5e_2 + 5e_3 = (4,9,9)$. On obtient le même résultat en calculant directement $\mathrm{PA}^t\begin{pmatrix}2 & 0 & 3\end{pmatrix}$. Il vient de même $f^3(e_1) = (8,27,27)$.

2. a. La matrice de passage de la base canonique à la base $\underline{e}$ est donnée par :

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & -1 & 0\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

b. La formule de changement de base donne $\mathrm{B} = \mathrm{PAP}^{-1}$.

c. Le calcul donne

$$\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\1 & 0 & -1\\-1 & -1 & 2\end{pmatrix}.$$

d. D'après **c.**, **d.** et **e.**,

$$\mathrm{B} = \mathrm{PAP}^{-1} = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 3\end{pmatrix}.$$

3. Le polynôme $\mathrm{P} = (\mathrm{X}-2)(\mathrm{X}-3) = \mathrm{X}^2 - 5\mathrm{X} + 6$ annule B : $\mathrm{B}^2 - 5\mathrm{B} + 6\mathrm{I}_3$ donc f : $f^2 - 5f + 6\,\mathrm{id} = 0$.

Troisième exercice

1. a. On a $p = 4$ et $q = 5$.

b. Les coordonnées de $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ en base canonique sont données par la matrice

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\\y_5\end{pmatrix} = \mathrm{A}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 2x_4\\2x_1 - x_2 + 7x_3 - x_4\\3x_1 + 8x_3 - 2x_4\\x_2 - 3x_3 - x_4\\-2x_1 + x_2 - 7x_3 + x_4\end{pmatrix}.$$

2. On résout le système

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = 0 \iff \left\{\begin{array}{rrrrl} x_1 & +\,2x_2 & +\,6x_3 & +\,2x_4 & = 0\\ 2x_1 & -\,x_2 & +\,7x_3 & -\,x_4 & = 0\\ 3x_1 & & +\,8x_3 & -\,2x_4 & = 0\\ & x_2 & -\,3x_3 & -\,x_4 & = 0\\ -2x_1 & +\,x_2 & -\,7x_3 & +\,x_4 & = 0\end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-2L_1\\ L_3\leftarrow L_3-3L_1\\ L_5\leftarrow L_5+2L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{rrrrl} \underline{x_1} & +\,2x_2 & +\,6x_3 & +\,2x_4 & = 0\\ & -\,5x_2 & -\,5x_3 & -\,5x_4 & = 0\\ & -\,6x_2 & -\,10x_3 & -\,8x_4 & = 0\\ & x_2 & -\,3x_3 & -\,x_4 & = 0\\ & 5x_2 & +\,5x_3 & +\,5x_4 & = 0\end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_5 \leftarrow \frac{1}{5}L_5 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_5 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 6L_5 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_5}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} \underline{x_1} & + & 2x_2 & + & 6x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \\ & & & - & 4x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \\ & & & - & 4x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \\ & & \underline{x_2} & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = 2x_4 \\ x_2 = -\frac{1}{2}x_4 \\ x_3 = -\frac{1}{2}x_4 \end{cases}$$

Le noyau de f est donc la droite dirigée par le vecteur $(4, -1, -1, 2)$.

3. a. D'après le théorème du rang, $\operatorname{rg} f = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \operatorname{Ker} f = 3$ et $\operatorname{Im} f$ est donc de dimension 3.

b. Les colonnes de A donnent quatre vecteurs générateurs $v_1 = (1, 2, 3, 0, -2)$, $v_2 = (2, -1, 0, 1, 1)$, $v_3 = (6, 7, 8, -3, -7)$ et $v_4 = (2, -1, -2, -1, 1)$ de $\operatorname{Im} f$. Mais la question **c.** fait apparaître que $v_4 = -2v_1 + \frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{2}v_3$. La famille (v_1, v_2, v_3) est donc génératrice $\operatorname{Im} f$ et comme elle est formée de $3 = \dim(\operatorname{Im} f)$ vecteurs, c'est une base de $\operatorname{Im} f$.

c. On recherche les hyperplans d'équations $a_1 y_1 + \cdots + a_5 y_5 = 0$ contenant v_1, v_2 et v_3. La résolution du système associé (à cinq inconnues et trois équations) conduit (par exemple) aux deux hyperplans H_1 et H_2 d'équations respectives $y_2 + y_5 = 0$ et $y_1 + 7y_2 - 5y_3 + 5y_4 = 0$. On a donc l'inclusion $\operatorname{Im} f \subset H_1 \cap H_2$ mais par ailleurs, le théorème du rang appliqué à l'application linéaire g canoniquement associée à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 7 & -5 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

montre que $H_1 \cap H_2 = \operatorname{Ker} g$ est de dimension 3 et l'inclusion précédente est donc une égalité. Le sous-espace $\operatorname{Im} f$ est donc caractérisé par le système d'équations

$$\begin{cases} y_2 + y_5 = 0 \\ y_1 + 7y_2 - 5y_3 + 5y_4 = 0 \end{cases}.$$