

ECRICOME 2017 S

Éléments de correction

Premier exercice

1. **a.** La fonction f admet pour limite 0 en 0 d'après les théorèmes de croissances comparées. Par continuité de la fonction exponentielle, la fonction g admet alors 1 pour limite en 0.
- b.** On obtient immédiatement le tableau de variations de f en étudiant le signe de sa dérivée. Celui de g s'en déduit par croissance de la fonction exponentielle.

x	0	e^{-1}	1
$f'(x)$	–	0	+
f	0	$-e^{-1}$	0
g	1	$e^{-e^{-1}}$	1

- c.** La fonction g admettant une limite finie en 0, elle est prolongeable par continuité au segment $[0, 1]$, si bien que son intégrale $\int_0^1 g(t) dt$ converge.
2. **a.** Pour $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $u_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (t \ln t)^n dt$ converge pour les mêmes raisons qu'en 1.c..
- b.** D'après les variations de f obtenues en 1.b., on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 |t \ln t|^n dt \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 e^{-n} dt = \frac{e^{-n}}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

d'où l'on déduit par encadrement que (u_n) converge vers 0.

- c.** Le calcul de $u_0 = 1$ est immédiat, celui de u_1 peut être fait par intégration par parties : sachant les intégrales (et le crochet) convergents,

$$u_1 = \int_0^1 t \ln t dt = \left[\frac{t^2}{2} \ln t \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{2} dt = -\frac{1}{4}.$$

- d.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient de même par intégration par parties :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \int_0^1 t^n (\ln t)^k dt = -\frac{k}{n+1} \int_0^1 t^n (\ln t)^{k-1} dt$$

d'où l'on déduit, par récurrence sur k , que :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \int_0^1 t^n (\ln t)^k dt = \frac{(-1)^k k!}{(n+1)^k} \int_0^1 t^n dt = \frac{(-1)^k k!}{(n+1)^{k+1}}.$$

En particulier,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 (t \ln t)^n dt = \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

- e.** On peut utiliser l'une des trois inégalités ci-dessous (la première a été obtenue en b. et les deux suivantes résultent de la formule établie en d.)

$$|u_n| \leq \frac{e^{-n}}{n!}, \quad |u_n| \leq \frac{1}{n^2}, \quad |u_n| \leq \frac{1}{2^n}$$

valables pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour justifier la convergence absolue de la série $\sum u_n$ par comparaison à une série exponentielle, de Riemann ou géométrique convergente.

f. On peut proposer un code itératif :

Listing 1 : Calcul de S_n , version itérative

```
function S=somme(n)
    S=0;
    for k=0:n
        S=S+(-1)^k/(k+1)^(k+1);
    end
endfunction
```

ou matriciel :

Listing 2 : Calcul de S_n , version matricielle

```
function S=somme(n)
    k=0:n;
    S=sum((-1).^k./(k+1).^(k+1));
endfunction
```

3. a. Pour $x \in [-\frac{1}{e}, 0]$ et $n \in \mathbb{N}$, la fonction \exp est de classe \mathcal{C}^{n+1} sur le segment $[x, 0]$ avec :

$$\forall t \in [x, 0], \quad |\exp^{(n+1)} t| = e^t \leq 1 = M.$$

D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à l'ordre n à la fonction \exp entre 0 et x , on a donc :

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| = \left| \exp x - \sum_{k=0}^n \frac{\exp^{(k)} 0}{k!} x^k \right| \leq \frac{M^{n+1}}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leq \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}.$$

b. En appliquant l'inégalité de la question a. à $x = f(t)$, qui appartient à $[-\frac{1}{e}, 0]$ lorsque $t \in]0, 1]$ d'après 1.b., on obtient :

$$|I - S_n| = \left| \int_0^1 \left(e^{t \ln t} - \sum_{k=0}^n \frac{(t \ln t)^k}{k!} \right) dt \right| \leq \int_0^1 \left| e^{t \ln t} - \sum_{k=0}^n \frac{(t \ln t)^k}{k!} \right| dt \leq \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}.$$

c. Le membre de droite dans l'inégalité de la question b. convergeant vers 0, on en déduit par encadrement que (S_n) converge vers I, i.e. d'après 2.d. et par décalage d'indice que :

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^n}.$$

d. D'après la question b., pour que S_n soit une valeur approchée de I à une précision $\varepsilon > 0$ donnée, i.e. pour que $|I - S_n| \leq \varepsilon$, il suffit d'avoir $\frac{1}{e^{n+1}(n+1)!} \leq \varepsilon$. On peut donc proposer le code ci-dessous :

Listing 3 : Valeur approchée de I à une précision donnée

```
function I=estimation(eps)
    n=0;
    e=exp(-1);
    x=e;
    while (x>eps)
        n=n+1;
        x=x*e/(n+1);
    end
    I=somme(n);
endfunction
```

On calcule les premiers termes $x_n = \frac{1}{e^{n+1}(n+1)!}$ jusqu'à avoir $x_n \leq \varepsilon$ puis on calcule la valeur de S_n correspondante.



Deuxième exercice

1. **a.** La matrice J étant symétrique réelle, elle ortho-diagonalisable : il existe une matrice $P \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ orthogonale et une matrice D diagonale telles que ${}^tPJP = D$ i.e. $J = PD{}^tP$.
- b.** Les colonnes de J étant égales et non nulles, elles engendrent une droite : la matrice J est donc de rang 1. Le théorème du rang appliqué à l'endomorphisme (de $\mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R})$!) canoniquement associé à J assure alors que $\dim \text{Ker } J = n - \text{rg } J = n - 1 > 0$. Ainsi 0 est valeur propre de J et le sous-espace propre associé est de dimension $n - 1$.
- c.** Les matrices D et J , semblables puisque P est orthogonale, ont même rang et même trace. Ainsi un seul coefficient diagonal de D n'est pas nul, qui constitue la dernière valeur propre λ de J . Celle-ci est donnée par la trace : $\lambda = \text{tr } D = \text{tr } J = n$. Quitte à réordonner les colonnes de P , on peut donc supposer que D est la matrice $\text{diag}(0, \dots, 0, n)$.

2. **a.** On a en effet

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} x_i x_j = \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j,$$

d'où le résultat.

b. La matrice

$$M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R}),$$

de coefficient générique

$$m_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases}, \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

convient.

Remarque. La question **c.** montre que la matrice M attendue doit être symétrique, même si ce n'est pas explicite dans l'énoncé de la question **b.**

c. On a immédiatement $M = \frac{1}{2}J - \frac{1}{2}I$.

d. D'après **1.a.** et **c.**, sachant P orthogonale, il vient :

$$M = \frac{1}{2}PD{}^tP - \frac{1}{2}P{}^tP = P\Delta{}^tP$$

où

$$\Delta = \frac{1}{2}D - \frac{1}{2}I = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & n-1 \end{pmatrix}.$$

e. Trois méthodes sont envisageables, la première étant la plus pertinente ici car elle s'appuie sur les questions précédentes.

- *Méthode 1* : en utilisant la diagonalisation de M

D'après **b.** et **d.**,

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(x) = {}^tXP\Delta{}^tPX = {}^t({}^tPX)\Delta({}^tPX) = {}^tY\Delta Y = \frac{n}{2}y_n^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n y_i^2$$

où $Y = {}^tPX = (y_1 \ \cdots \ y_n)$. Or, sachant P orthogonale, on a

$$\sum_{i=1}^n y_i^2 = {}^tYY = {}^tXX = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

si bien que $x \in \mathcal{S}$ équivaut à $y \in \mathcal{S}$. Comme $y_n^2 \leq {}^tYY$ avec égalité lorsque $y_1 = \cdots = y_{n-1} = 0$,

$$\forall x \in \mathcal{S}, \quad -\frac{1}{2} \leq f(x) = \frac{n}{2}y_n^2 - \frac{1}{2} \leq \frac{n-1}{2}$$

avec égalité à gauche (resp. à droite) pour $y_n = 0$ c'est-à-dire lorsque $X \in \mathcal{S}$ est propre pour M

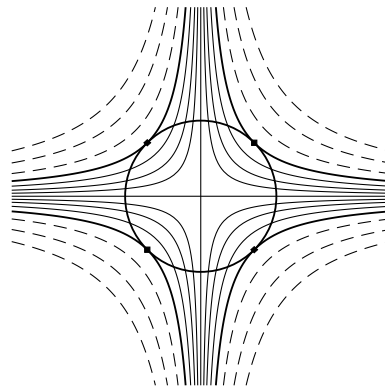
associé à la valeur propre $-\frac{1}{2}$ (resp. pour $y_1 = \dots = y_{n-1} = 0$ c'est-à-dire lorsque $X \in \mathcal{S}$ est propre pour M associé à la valeur propre $\frac{n-1}{2}$). D'où l'existence d'un minimum et d'un maximum pour f sur \mathcal{S} , respectivement égaux à $-\frac{1}{2}$ et $\frac{n-1}{2}$.

- **Méthode 2 :** en faisant intervenir un problème d'optimisation sous contrainte

L'ensemble \mathcal{S} est défini comme ligne de niveau 1 de la fonction $\varphi : x \mapsto x_1^2 + \dots + x_n^2$ continue sur \mathbb{R}^n . À ce titre, c'est une partie fermée de \mathbb{R}^n . Elle est également bornée car incluse dans la boule unité, et non vide. La fonction f , qui y est continue, y admet donc un minimum et un maximum. Pour compléter l'analyse précédente, la fonction φ est de classe \mathcal{C}^1 sur l'ouvert \mathbb{R}^n telle que $\nabla\varphi(x) = 2x \neq 0$ pour tout $x \in \mathcal{S}$: l'ensemble \mathcal{S} est donc une contrainte non critique.

Classiquement, la fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur l'ouvert \mathbb{R}^n , avec $\nabla f(x) = 2MX$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Les extremums de f sous la contrainte \mathcal{S} sont donc atteints en des points $x \in \mathcal{S}$ pour lesquels existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla f(x) = \lambda \nabla\varphi(x)$, c'est-à-dire $MX = \lambda X$. Pour un tel vecteur X , unitaire et propre pour M associé à la valeur propre λ , on a $f(x) = \lambda$. L'existence des minimum et maximum de f sous la contrainte \mathcal{S} étant acquise, ils sont respectivement égaux à la plus petite et la plus grande des deux valeurs propres de M : $-\frac{1}{2}$ et $\frac{n-1}{2}$.

Remarque. Si cette méthode est inutilement compliquée ici (le calcul de $\nabla f(x)$ n'a pas été détaillé), elle permet de vérifier rapidement sur un dessin les résultats obtenus avec la méthode précédente dans le cas $n = 2$.



La contrainte (en gras) est tangente aux lignes de f aux niveaux $\pm\frac{1}{2}$ (en gras), qui sont les niveaux extremaux correspondant à des lignes de f (en traits pleins) qui intersectent la contrainte.

- **Méthode 3 :** en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans \mathbb{R}^n euclidien canonique aux vecteurs (x_1, \dots, x_n) et $(1, \dots, 1)$, il vient :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n x_i^2$$

d'où,

$$\forall x \in \mathcal{S}, \quad -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 - \sum_{i=1}^n x_i^2 \right] \leq \frac{n-1}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2 = \frac{n-1}{2}$$

avec égalité à gauche pour $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, \dots, 0)$ et à droite (en utilisant le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz) pour $x = \frac{1}{\sqrt{n}}(1, \dots, 1)$. D'où l'existence d'un minimum et d'un maximum pour f sur \mathcal{S} , respectivement égaux à $-\frac{1}{2}$ et $\frac{n-1}{2}$.

- a. La matrice A , symétrique réelle, est ortho-diagonalisable : il existe $Q \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ orthogonale et $D \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que $A = QDQ^{-1}$. Les coefficients diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de D , qui sont aussi les valeurs propres de A , sont strictement positifs par hypothèse. En posant $\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ et $B = Q\Delta Q^{-1}$, on a alors $B^2 = Q\Delta^2 Q^{-1} = QDQ^{-1} = A$.

Par ailleurs, et même si ce n'est pas demandé dans l'énoncé, cette matrice B est symétrique car Q est orthogonale : ${}^t B = {}^t(Q\Delta Q^{-1}) = Q^t \Delta^t Q = Q\Delta^t Q = B$. On note également qu'elle est inversible car ses valeurs propres sont non nulles.

- b. Les endomorphismes u et v , représentés en base canonique, orthonormale, par des matrices A et B symétriques, sont symétriques. Ils sont par ailleurs bijectifs car A et B sont inversibles.

Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on a donc

$$\langle u(x), x \rangle = \langle v(v(x)), x \rangle = \langle v(x), v(x) \rangle = \|v(x)\|^2.$$

Par suite, pour $y \in \mathbb{R}^n$ et $z = u^{-1}(y) = v^{-2}(y)$, on a également

$$\langle u^{-1}(y), y \rangle = \langle z, u(z) \rangle = \|v(z)\|^2 = \|v^{-1}(y)\|^2.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée aux vecteurs $v(x)$ et $v^{-1}(y)$ donne alors l'inégalité attendue :

$$\langle x, y \rangle^2 = \langle x, v(v^{-1}(y)) \rangle^2 = \langle v(x), v^{-1}(y) \rangle^2 \leq \|v(x)\|^2 \|v^{-1}(y)\|^2 = \langle u(x), x \rangle \langle u^{-1}(y), y \rangle.$$

Pour $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ donné, l'inégalité ci-dessus est une égalité lorsque la famille $(v(x), v^{-1}(y))$ est liée. L'endomorphisme v étant bijectif, cela signifie que la famille $(u(x), y)$ est liée. C'est en particulier le cas pour $y = u(x)$, non nul par injectivité de u .

c. D'après la question b. avec $y = x$, on a :

$$\forall x \in \mathcal{S}, \quad 1 = \|x\|^2 \leq \langle u(x), x \rangle \langle u^{-1}(x), x \rangle$$

avec égalité lorsque x est vecteur propre de u . Comme u admet des vecteurs propres unitaires, il en ressort que

$$\min_{x \in \mathcal{S}} \langle u(x), x \rangle \langle u^{-1}(x), x \rangle = 1.$$

4. a. La matrice A , carrée d'ordre 2 de déterminant $1 \neq 0$, est inversible, d'inverse

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b. Les valeurs propres de A sont les réels λ pour lesquels la matrice

$$A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{pmatrix}$$

n'est pas inversible, i.e. pour lesquels $\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$. Il s'agit donc des réels $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, tous deux strictement positifs.

c. D'après la question b., la matrice A satisfait les hypothèses de la question 3.. En conservant les mêmes notations,

$$\begin{aligned} \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x) &= (x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2)(2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2) \\ &= ({}^tXAX)({}^tXA^{-1}X) = \langle u(x), x \rangle \langle u^{-1}(x), x \rangle. \end{aligned}$$

D'après la question 3.c. (plus précisément, d'après la réponse apportée, plus précise que ce qui était demandé : la borne inférieure est atteinte), la fonction g admet donc sous la contrainte $x_1^2 + x_2^2 = 1$, équivalente à $\|x\| = 1$, un minimum égal à 1.

Problème

Première partie

1. La fonction g_a est positive sur \mathbb{R} , continue sauf peut-être en 0 avec, pour $y < 0 < z$,

$$\int_y^z g_a(x) dx = \int_0^z \frac{x}{a^2} e^{-x^2/(2a^2)} dx = [-e^{-x^2/(2a^2)}]_0^z = 1 - e^{-z^2/(2a^2)} \xrightarrow[\substack{y \rightarrow -\infty \\ z \rightarrow +\infty}]{} 1,$$

d'où l'on déduit la convergence et la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} g_a(x) dx = 1$, ce qui achève de prouver que g_a est une densité de probabilité.

2. a. La variable N a pour densité $x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/(2a^2)}$, pour moments $\mathbb{E}(N) = 0$ et $\mathbb{E}(N^2) = \mathbb{V}(N) = a^2$.

b. Par parité,

$$a^2 = \mathbb{E}(N^2) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2/(2a^2)} dx = \frac{2}{a\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2/(2a^2)} dx$$

d'où la convergence et la valeur de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x g_a(x) dx = \frac{1}{a^2} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2/(2a^2)} dx = a \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

La variable Z_a admet donc une espérance égale à $\mathbb{E}(Z_a) = a \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

c. Par changement de variable $y \mapsto x = a\sqrt{2y}$, de classe \mathcal{C}^1 et strictement croissant de $]0, +\infty[$ sur lui-même, on justifie la convergence absolue et on calcule la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g_a(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{a^2} e^{-x^2/(2a^2)} dx = 2a^2 \int_0^{+\infty} y e^{-y} dy = 2a^2 \Gamma(2) = 2a^2.$$

Ceci établit l'existence de $\mathbb{E}(Z_a^2) = 2a^2$, d'où l'on déduit que Z_a admet pour variance

$$\mathbb{V}(Z_a) = \mathbb{E}(Z_a^2) - \mathbb{E}(Z_a)^2 = \frac{(4 - \pi)a^2}{2}.$$

Deuxième partie

1. L'instruction `floor(n*rand())+1` simule la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Listing 4 : Simulation de X_n

```

fonction X=tirage(n)
    urnes=zeros(1,n);
    X=1;
    choix=floor(n*rand())+1; // choix d'une urne
    while (urnes(choix)<1)
        // on continue si l'urne choisie ne contient aucune boule
        urnes(choix)=urnes(choix)+1;
        choix=floor(n*rand())+1; // choix d'une urne
        X=X+1; // on incrémente le nombre de boules réparties
    end
endfonction
    
```

2. Pour $n = 1$, toutes les boules sont placées dans l'unique urne. La variable X_1 est donc certaine égale à 2. Elle admet pour espérance $\mathbb{E}(X_1) = 2$ et pour variance $\mathbb{V}(X_1) = 0$.

3. Soit Y la variable aléatoire qui donne le nombre de boules, parmi les deux premières, placées dans l'urne 1. Cette variable compte le nombre de succès (choisir l'urne 1) dans une suite de 2 épreuves de Bernoulli (choisir une urne) indépendantes et de même paramètre $\frac{1}{2}$. Elle suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(2, \frac{1}{2})$.

La variable X_2 prend deux valeurs : 2 si les deux premières boules sont placées dans la même urne et 3 sinon. Dans ces conditions,

$$\mathbb{P}(X_2 = 2) = \mathbb{P}(Y \in \{0, 2\}) = \mathbb{P}(Y = 0) + \mathbb{P}(Y = 2) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_2 = 3) = \mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{2}.$$

La variable X_2 suit donc la loi uniforme sur $\{2, 3\}$: elle s'écrit $X_2 = 2 + Z$ où Z suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$. Elle admet donc pour espérance $\mathbb{E}(X_2) = 2 + \mathbb{E}(Z) = \frac{5}{2}$ et pour variance $\mathbb{V}(X_2) = \mathbb{V}(Z) = \frac{1}{4}$.

4. a. Il faut placer au moins deux boules pour qu'une urne soit susceptible de contenir deux boules... Par ailleurs, une fois réparties $n + 1$ boules parmi les n urnes, l'une au moins des urnes contient au moins deux boules. Ceci justifie l'inclusion $X_n(\Omega) \subset \llbracket 2, n + 1 \rrbracket$. Réciproquement, pour un entier $k \in \llbracket 2, n + 1 \rrbracket$, l'événement $[X_n = k]$ est réalisé en plaçant successivement une boule dans chacune des urnes $1, 2, \dots, k - 1$ puis en plaçant la k -ième boule dans l'urne $k - 1$. On a donc $X_n(\Omega) = \llbracket 2, n + 1 \rrbracket$.

b. Soient N_1, N_2, \dots, N_{n+1} les variables aléatoires donnant respectivement les numéros des urnes dans lesquelles sont successivement placées les $n + 1$ premières boules.

Pour $k \in \llbracket 2, n + 1 \rrbracket$, le vecteur $V_k = (N_1, N_2, \dots, N_k)$ prend ses valeurs uniformément dans l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket^k$: par indépendance des variables N_1, \dots, N_k , la loi conjointe du vecteur V_k est le produit des lois marginales des N_i , toutes uniformes sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. En d'autres termes,

$$\forall v = (n_1, \dots, n_k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^k, \quad \mathbb{P}(V_k = v) = \frac{1}{n^k}.$$

L'événement $[X_n = k]$ est réalisé si, et seulement si, les $k - 1$ premières boules sont dans des urnes distinctes et la k -ième dans l'une de ces $k - 1$ premières urnes. Ainsi $[X_n = k] = [V_k \in \mathcal{V}_k^n]$ où \mathcal{V}_k^n est l'ensemble des k -uplets $v = (n_1, \dots, n_k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^k$ tels que n_1, \dots, n_{k-1} sont deux-à-deux distincts et $n_k \in \{n_1, \dots, n_{k-1}\}$. Cet ensemble est de cardinal $n(n-1) \cdots (n-k+2)(k-1) = \frac{n!}{(n-k+1)!}(k-1)$. Par suite,

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(V_k \in \mathcal{V}_k^n) = \sum_{v \in \mathcal{V}_k^n} \mathbb{P}(V = v) = \frac{1}{n^k} \# \mathcal{V}_k^n = \frac{n!(k-1)}{n^k(n-k+1)!}.$$

c. La variable X_n étant finie, elle admet pour espérance

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k \in X_n(\Omega)} k \mathbb{P}(X_n = k) = n! \sum_{k=2}^{n+1} \frac{k(k-1)}{n^k(n-k+1)!}.$$

d. Le code ci-dessous permet un calcul itératif de la somme ci-dessus.

Listing 5 : Calcul de $\mathbb{E}(X_n)$

```

function E=esperance(n)
    facto=prod(1:n);
    fac=facto;
    somme=0;
    puissance=n;
    for k=2:(n+1)
        puissance=puissance*n;
        fac=fac/(n-k+2);
        somme=somme+k*(k-1)/(puissance*fac);
    end
    E=facto*somme;
endfunction
    
```

Troisième partie

1. L'inégalité de droite peut être justifiée classiquement par un argument de convexité et celle de gauche par l'étude de la fonction $x \mapsto \ln(1-x) + x + x^2$ sur l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$.

On peut ici justifier les deux en observant que :

$$\forall x \in]-\infty, 1[, \quad -\ln(1-x) - x = [-\ln(1-t) - t]_0^x = \int_0^x \left(\frac{1}{1-t} - 1 \right) dt = \int_0^x \frac{t}{1-t} dt$$

d'où :

$$\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad 0 \leq -\ln(1-x) - x \leq 2 \int_0^x t dt = x^2,$$

ce qui conduit immédiatement au résultat.

2. Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ tel que $m \leq \frac{n}{2}$. Pour $k \in \llbracket 0, m \rrbracket$, on a $0 \leq \frac{k}{n} \leq \frac{k}{2m} \leq \frac{1}{2}$ d'où, d'après 1.,

$$\forall k \in \llbracket 0, m \rrbracket, \quad -\frac{k}{n} - \frac{k^2}{n^2} \leq \ln\left(1 - \frac{k}{n}\right) \leq -\frac{k}{n}$$

puis :

$$-\frac{1}{n} \sum_{k=0}^m k - \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^m k^2 \leq \sum_{k=0}^m \ln\left(1 - \frac{k}{n}\right) \leq -\frac{1}{n} \sum_{k=0}^m k$$

c'est-à-dire

$$-\frac{m(m+1)}{2n} - \frac{m(m+1)(2m+1)}{6n^2} \leq \alpha(n, m) \leq -\frac{m(m+1)}{2n}.$$

3. Sachant que $X > 0$, on a

$$\forall x \leq 0, \quad \sqrt{n} \mathbb{P}(X_n = \lfloor \sqrt{nx} \rfloor) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

4. a. Par définition,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sqrt{nx} - 1 \leq \lfloor \sqrt{nx} \rfloor \leq \sqrt{nx}$$

d'où l'on déduit que $\lfloor \sqrt{nx} \rfloor \rightarrow +\infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Plus précisément, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 - \frac{1}{\sqrt{nx}} \leq \frac{\lfloor \sqrt{nx} \rfloor}{\sqrt{nx}} \leq 1$$

d'où, par encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lfloor \sqrt{nx} \rfloor}{\sqrt{nx}} = 1$$

c'est-à-dire $\lfloor \sqrt{nx} \rfloor \sim \sqrt{nx}$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

b. Puisque $\lfloor \sqrt{nx} \rfloor \sim \sqrt{nx} = o(n)$ lorsque $n \rightarrow \infty$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N, \quad \lfloor \sqrt{nx} \rfloor \leq \frac{n}{2}.$$

c. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket$, le produit ci-dessous comporte $(k-2) + 1 = k-1$ facteurs si bien que :

$$\frac{k-1}{n} \prod_{i=0}^{k-2} \left(1 - \frac{i}{n}\right) = \frac{k-1}{n^k} \prod_{i=0}^{k-2} (n-i) = \frac{k-1}{n^k} \frac{n!}{(n-k+1)!} = \mathbb{P}(X_n = k)$$

d'après **II.4.b.**

d. Pour $n \geq N$ tel que $\sqrt{nx} \geq 2$ (on peut supposer que cette condition supplémentaire est réalisée, quitte à augmenter N), on a d'après **b.** et **c.** :

$$\mathbb{P}(X_n = \lfloor \sqrt{nx} \rfloor) = \frac{\lfloor \sqrt{nx} \rfloor - 1}{n} \exp\left(\sum_{i=0}^{\lfloor \sqrt{nx} \rfloor - 2} \ln\left(1 - \frac{i}{n}\right)\right) = \frac{\lfloor \sqrt{nx} \rfloor - 1}{n} \exp(\alpha(n, \lfloor \sqrt{nx} \rfloor - 2)).$$

e. La question **b.** permet d'appliquer la question **2.** pour obtenir un encadrement de $\alpha(n, m)$ avec $m = \lfloor \sqrt{nx} \rfloor - 2$. En utilisant l'équivalent $m \sim \sqrt{nx}$ lorsque $n \rightarrow \infty$, on montre facilement que les deux membres extrémaux de cet encadrement convergent vers $-\frac{x^2}{2}$. Par suite,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(n, \lfloor \sqrt{nx} \rfloor - 2) = -\frac{x^2}{2}$$

d'où, par continuité de la fonction exponentielle et d'après la question **a.**,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = \lfloor \sqrt{nx} \rfloor) = xe^{-x^2/2}.$$

Quatrième partie

1. a. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\lfloor \sqrt{nx} \rfloor = k \iff k \leq \sqrt{nx} < k+1 \iff x \in \left[\frac{k}{\sqrt{n}}, \frac{k+1}{\sqrt{n}} \right[.$$

b. D'après la question **a.** et sachant que X_n est à valeurs dans $\llbracket 2, n+1 \rrbracket$, la fonction f_n est constante sur chacun des intervalles $]-\infty, \frac{2}{\sqrt{n}}[$ (où elle est nulle), $[\frac{2}{\sqrt{n}}, \frac{3}{\sqrt{n}}[$, ..., $[\frac{n+1}{\sqrt{n}}, \frac{n+2}{\sqrt{n}}[$ et $[\frac{n+2}{\sqrt{n}}, +\infty[$ (sur lequel elle est nulle). Elle est donc positive sur \mathbb{R} , continue sur \mathbb{R} sauf peut-être aux points $\frac{2}{\sqrt{n}}, \frac{3}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{n+2}{\sqrt{n}}$ avec

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx = \sum_{k=2}^{n+1} \int_{k/\sqrt{n}}^{(k+1)/\sqrt{n}} \sqrt{n} \mathbb{P}(X_n = k) dx = \sum_{k=2}^{n+1} \mathbb{P}(X_n = k) = 1.$$

Toutes les conditions sont réunies pour que f_n soit une densité de probabilité.

2. a. Sur l'encadrement

$$\lfloor \sqrt{nx} \rfloor - k \leq \sqrt{nx} - k < \lfloor \sqrt{nx} \rfloor - k + 1,$$

on observe que :

- si $k = \lfloor \sqrt{nx} \rfloor$, alors $0 \leq \sqrt{nx} - k < 1$;
- si $k > \lfloor \sqrt{nx} \rfloor$ i.e. $k \geq \lfloor \sqrt{nx} \rfloor + 1$, alors $\sqrt{nx} - k < 0$;
- si $k < \lfloor \sqrt{nx} \rfloor$ i.e. $k \leq \lfloor \sqrt{nx} \rfloor - 1$, alors $\sqrt{nx} - k \geq 1$.

Puisque U suit la loi uniforme sur $[0, 1]$, on en déduit que :

$$\mathbb{P}(U \leq \sqrt{nx} - k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k < \lfloor \sqrt{nx} \rfloor \\ \sqrt{nx} - \lfloor \sqrt{nx} \rfloor & \text{si } k = \lfloor \sqrt{nx} \rfloor \\ 0 & \text{si } k > \lfloor \sqrt{nx} \rfloor \end{cases}.$$

b. La variable Y_n est à valeurs dans $[\frac{2}{\sqrt{n}}, \frac{n+2}{\sqrt{n}}[$.

Pour $x \in \mathbb{R}$ donné, la formule des probabilités totales appliquée au système complet associé à la variable X_n garantit que :

$$\mathbb{P}(Y_n \leq x) = \sum_{k=2}^{n+1} \mathbb{P}(X_n = k) \mathbb{P}_{[X_n=k]}(Y_n \leq x) = \sum_{k=2}^{n+1} \mathbb{P}(X_n = k) \mathbb{P}_{[X_n=k]}(U \leq \sqrt{nx} - k)$$

que l'on peut simplifier vu **a.** compte-tenu de l'indépendance de U et X_k pour tout k . Lorsque $x \in [\frac{2}{\sqrt{n}}, \frac{n+2}{\sqrt{n}}[$ c'est-à-dire $2 \leq \lfloor \sqrt{nx} \rfloor \leq n + 1$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_n \leq x) &= \sum_{\substack{2 \leq k \leq n+1 \\ k < \lfloor \sqrt{nx} \rfloor}} \mathbb{P}(X_n = k) + \mathbb{P}(X_n = \lfloor \sqrt{nx} \rfloor) (\sqrt{nx} - \lfloor \sqrt{nx} \rfloor) \\ &= \sum_{\substack{2 \leq k \leq n+1 \\ k \leq \lfloor \sqrt{nx} \rfloor - 1}} \int_{k/\sqrt{n}}^{(k+1)/\sqrt{n}} f_n(t) dt + \int_{\lfloor \sqrt{nx} \rfloor / \sqrt{n}}^x f_n(t) dt \\ &= \int_{2/\sqrt{n}}^x f_n(t) dt = \int_{-\infty}^x f_n(t) dt \end{aligned}$$

car $x \in [\frac{\lfloor \sqrt{nx} \rfloor}{\sqrt{n}}, \frac{\lfloor \sqrt{nx} \rfloor + 1}{\sqrt{n}}]$. La vérification de la formule étant immédiate lorsque $x \notin [\frac{2}{\sqrt{n}}, \frac{n+2}{\sqrt{n}}[$, on a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}(Y_n \leq x) = \int_{-\infty}^x f_n(t) dt.$$

c. D'après la question **1.b.**, le cours assure que $x \mapsto \int_{-\infty}^x f_n(t) dt$ est la fonction de répartition de toute variable de densité f_n . La variable Y_n a donc même loi qu'une variable de densité f_n d'après **b.** : elle admet pour densité f_n .

d. D'après **III.3.** et **III.4.e.**,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x e^{-x^2/2} & \text{si } x > 0 \end{cases} = g_1(x).$$

D'après **c.** et le résultat admis au début de la partie, cela assure la convergence en loi de la suite (Y_n) vers la variable Z_1 de la deuxième partie, à densité g_1 .

3. a. Soient (A_n) et (B_n) deux suites de variables aléatoires, A une variable aléatoire et b une constante. Si (A_n) converge en loi vers A et (B_n) converge en probabilité vers b , alors $(A_n + B_n)$ converge en loi vers $A + b$.

b. Pour $\varepsilon > 0$ donné,

$$\forall n \geq \frac{1}{\varepsilon^2}, \quad \mathbb{P}\left(\left|\frac{U}{\sqrt{n}}\right| \geq \varepsilon\right) = \mathbb{P}(U \geq \sqrt{n}\varepsilon) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Ainsi la suite $(\frac{U}{\sqrt{n}})$ converge en probabilité vers la variable certaine nulle. D'après la question **2.d.** et le lemme de Slutsky, la suite de terme général

$$\frac{X_n}{\sqrt{n}} = Y_n - \frac{U}{\sqrt{n}}, \quad n \geq 1,$$

converge alors en loi vers la variable Z_1 , de densité g_1 .

