# ECRICOME 2016 S

Éléments de correction

## Premier exercice

**1. a.** On a, pour $x \to 0$,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{et} \quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2).$$

**b.** Il vient :

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= \frac{1}{n+1} - \ln\Big(\frac{n+1}{n}\Big) = \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} - \ln\Big(1+\frac{1}{n}\Big) \\ &= \frac{1}{n}\Big(1 - \frac{1}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) - \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big) \\ &= -\frac{1}{2n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big) \sim -\frac{1}{2n^2}. \end{aligned}$$

**c.** Par comparaison à la série de Riemann convergente $-\frac{1}{2}\sum \frac{1}{n^2}$, dont les termes sont tous négatifs, la série $\sum w_{n+1} - w_n$ est convergente. Par théorème, la convergence de cette série télescopique équivaut à celle de la suite $(w_n)$.

**2.** La fonction $\varphi$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ avec :

$$\forall t \in ]0, +\infty[, \quad \varphi'(t) = \frac{1 - \ln t}{t^2}.$$

On en déduit ses variations, résumées dans le tableau ci-dessous :

| $t$ | $0$ | | $\mathbf{e}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $\mathbf{e}^{-1}$ | $\searrow$ | $0$ |

**3. a.** En utilisant la décroissance de $\varphi$ sur $[3, +\infty[$, il vient :

$$\forall n \geqslant 2, \quad \mathrm{S}_{2(n+1)} - \mathrm{S}_{2n} = \varphi(2n+2) - \varphi(2n+1) \leqslant 0,$$

ce qui met en évidence la décroissance de la suite $(\mathrm{S}_{2n})_{n\geqslant 2}$. On montrerait de même la croissance de la suite $(\mathrm{S}_{2n+1})_{n\geqslant 2}$. Enfin,

$$\mathrm{S}_{2n} - \mathrm{S}_{2n+1} = \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Les deux suites $(\mathrm{S}_{2n})_{n\geqslant 2}$ et $(\mathrm{S}_{2n+1})_{n\geqslant 2}$ sont donc adjacentes.

**b.** Les suites $(\mathrm{S}_{2n})_{n\geqslant 2}$ et $(\mathrm{S}_{2n+1})_{n\geqslant 2}$ étant adjacentes, elles convergent vers une limite commune. Il en va donc de même des deux suites extraites principales [1] $(\mathrm{S}_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(\mathrm{S}_{2n+1})_{n\geqslant 0}$, ce qui entraîne [2] la convergence de la suite complète $(\mathrm{S}_n)_{n\geqslant 1}$.

La série $\sum u_n$, dont la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\geqslant 1}$ des sommes partielles converge comme on vient de le voir, est donc elle-même convergente. Cependant elle n'est pas absolument convergente car $n\,|u_n| = \ln n \to +\infty$ si bien que $0 \leqslant \frac{1}{n} = o(|u_n|)$, ce qui justifie la divergence de la série $\sum |u_n|$ par comparaison à la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$, divergente.

**4. a.** Pour $n \geqslant 3$ donné, la décroissance de la fonction $\varphi$ sur l'intervalle $[n, n+1] \subset [\mathbf{e}, +\infty[$ entraîne :

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} = \int_n^{n+1} \varphi(n+1)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_n^{n+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_n^{n+1} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

**b.** En observant que :

$$\forall n \geqslant 3, \quad \int_n^{n+1} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t = \Big[\frac{(\ln t)^2}{2}\Big]_n^{n+1} = \frac{\big(\ln(n+1)\big)^2}{2} - \frac{(\ln n)^2}{2},$$

1. Qui « recouvrent » la suite complète, au sens où $\{2n\}_{n\geqslant 1} \cup \{2n+1\}_{n\geqslant 0} = \mathbb{N}^*$.
2. On peut sans doute utiliser ce théorème, bien qu'il ne soit pas explicitement au programme.

l'inégalité de la question **a.** donne :

$$\forall n \geqslant 3, \quad v_{n+1} - v_n = \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\big(\ln(n+1)\big)^2}{2} + \frac{(\ln n)^2}{2} = \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant 0,$$

ce qui met en évidence la décroissance de la suite $(v_n)_{n\geqslant 3}$. Celle-ci est également minorée car le même argument qu'en **a.** donne :

$$\forall k \geqslant 3, \quad \frac{\ln k}{k} \geqslant \int_k^{k+1} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$$

d'où :

$$\begin{aligned}\forall n \geqslant 3, \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} - \int_1^n \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t &\geqslant \sum_{k=1}^{n-1}\Big(\frac{\ln k}{k} - \int_k^{k+1} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t\Big)\\ &\geqslant \sum_{k=1}^{2}\Big(\frac{\ln k}{k} - \int_k^{k+1} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t\Big) = \frac{\ln 2 - (\ln 3)^2}{2} = m.\end{aligned}$$

Décroissante et minorée, la suite $(v_n)_{n\geqslant 3}$ est donc convergente.

**5.** Il vient, pour $n \geqslant 1$ :

$$\mathrm{S}_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{\ln k}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \big((-1)^k + 1\big)\frac{\ln k}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln k}{k}$$

où :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad (-1)^k + 1 = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est impair} \\ 2 & \text{si } k \text{ est pair}\end{cases}$$

si bien que :

$$\mathrm{S}_{2n} = 2 \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant 2n \\ k \text{ pair}}} \frac{\ln k}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln k}{k} = 2\sum_{j=1}^{n} \frac{\ln(2j)}{2j} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln k}{k} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln k}{k}$$

après changement d'indice $k = 2j$ dans la première somme. Puis :

$$\begin{aligned}\mathrm{S}_{2n} &= (\ln 2)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln k}{k}\\ &= (\ln 2)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \Big(v_n + \frac{(\ln n)^2}{2}\Big) - \Big(v_{2n} + \frac{\big(\ln(2n)\big)^2}{2}\Big)\\ &= (\ln 2)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + v_n - v_{2n} - \frac{(\ln 2 + \ln n)^2 - (\ln n)^2}{2}\\ &= (\ln 2)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + v_n - v_{2n} - \frac{(\ln 2)^2}{2} - \ln 2 \ln n.\end{aligned}$$

**6.** D'après **5.**,

$$\forall n \geqslant 1, \quad \mathrm{S}_{2n} = (\ln 2) w_n + v_n - v_{2n} - \frac{(\ln 2)^2}{2}$$

d'où, en passant à la limite lorsque $n \to \infty$, sachant la série $\sum u_n$ convergente d'après **3.b.** et la suite $(v_n)$ convergente d'après **4.b.**, ainsi donc que sa suite extraite $(v_{2n})$ vers la même limite,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n} = \gamma \ln 2 - \frac{(\ln 2)^2}{2}.$$

## Deuxième exercice

**1. a.** Pour $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, $\deg \mathrm{P}'' \leqslant (\deg \mathrm{P}) - 2 \leqslant n$ et $\deg(\mathrm{XP}') = \deg \mathrm{X} + \deg \mathrm{P}' \leqslant \deg \mathrm{P} \leqslant n$ si bien que $\varphi(\mathrm{P})$ appartient à l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. La linéarité de $\varphi$ est conséquence de celle de la dérivation. L'application $\varphi$ est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

**b.** Il vient $\varphi(1) = 0$, $\varphi(\mathrm{X}) = 4\mathrm{X}$ puis $\varphi(\mathrm{X}^j) = 4j\mathrm{X}^j - j(j-1)\mathrm{X}^{j-2}$ pour $2 \leqslant j \leqslant n$.
La matrice $\mathrm{A}_n$ représentative de $\varphi$ en base canonique, carrée d'ordre $n+1$, a donc pour coefficient générique

$$a_{i,j} = \begin{cases} 4j & \text{si } i = j \\ -j(j-1) & \text{si } i = j-2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad 0 \leqslant i, j \leqslant n.$$

Elle s'écrit en extension :

$$\mathrm{A}_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -6 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & 8 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -n(n-1) \\ \vdots & \vdots & & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 4n \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

**c.** Le calcul donne immédiatement $\varphi(3\mathrm{X} - 4\mathrm{X}^3) = 12(3\mathrm{X} - 4\mathrm{X}^3)$. Le polynôme $3\mathrm{X} - 4\mathrm{X}^3 \neq 0$ est donc vecteur propre de $\varphi$ pour la valeur propre 12.

**d.** Les valeurs propres de $\varphi$ sont celles de sa matrice représentative $\mathrm{A}_n$, c'est-à-dire ses coefficients diagonaux puisque celle-ci est triangulaire : il s'agit de $0, 4, 8, \ldots, 4n$ i.e. des réels de la forme $4k$, $0 \leqslant k \leqslant n$. L'endomorphisme $\varphi$ admettant ainsi $n+1 = \dim \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ valeurs propres, il est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont de dimension 1.

**2. a.** La fonction $f$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'ouvert $\mathcal{D}_2$ par opérations sur les fonctions $\mathscr{C}^2$. Elle admet donc des dérivées partielles données par :

$$\forall (x,y) \in \mathcal{D}_2, \quad \partial_1 f(x,y) = 2x - \frac{1}{x-y}, \quad \partial_2 f(x,y) = 2y - \frac{1}{y-x}.$$

**b.** Pour $(x,y) \in \mathcal{D}_2$,

$$\nabla f(x,y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 2x - \frac{1}{x-y} = 0 \\ 2y - \frac{1}{y-x} = 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 4x^2 - 1 = 0 \\ y = -x \end{cases}.$$

Parmi les deux solutions $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ du système précédent, seule $\mathrm{B} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ appartient à $\mathcal{D}_2$, c'est donc l'unique point critique de la fonction $f$.

**c.** La fonction $f$ admet pour matrice hessienne :

$$\forall (x,y) \in \mathcal{D}_2, \quad \nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 + \frac{1}{(y-x)^2} & -\frac{1}{(y-x)^2} \\ -\frac{1}{(y-x)^2} & 2 + \frac{1}{(y-x)^2} \end{pmatrix}$$

et en particulier au point B :

$$\nabla^2 f(\mathrm{B}) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de cette matrice sont les réels $\lambda$ pour lesquels la matrice

$$\nabla^2 f(\mathrm{B}) - \lambda \mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

n'est pas inversible, i.e. dont le déterminant $(3-\lambda)^2 - 1 = (2-\lambda)(4-\lambda)$ est nul : il s'agit donc de 2 et 4, toutes deux strictement positives. La fonction $f$ présente donc au point critique B un minimum local.

**3. a.** On obtient :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \partial_k f(x_1, \ldots, x_n) = 2x_k - \sum_{1 \leqslant i < k} \frac{1}{x_k - x_i} + \sum_{k < j \leqslant n} \frac{1}{x_j - x_k} = 2x_k - \sum_{i \neq k} \frac{1}{x_k - x_i}.$$

**b.** C'est une conséquence immédiate de la définition de point critique et de l'expression obtenue en **a.**.

**c.** Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Partant de $S(X) = (X - x_k)Q_k(X)$, il vient :

$$S'(X) = (X - x_k)Q_k'(X) + Q_k(X) \quad \text{et} \quad S''(X) = 2Q_k'(X) + (X - x_k)Q_k''(X)$$

et en particulier $S_k'(x_k) = Q_k(x_k)$ et $S''(x_k) = 2Q_k'(x_k)$.

**d.** Le résultat s'obtient en appliquant la formule

$$\forall P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{R}[X], \quad \Big(\prod_{j=1}^{n} P_j\Big)' = \sum_{i=1}^{n}\Big(P_i' \prod_{j \neq i} P_j\Big) = \Big(\prod_{j=1}^{n} P_j\Big) \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i'}{P_i},$$

que l'on justifie par récurrence sur $n \geqslant 2$ (la première formule est une égalité polynomiale, la seconde une égalité entre fonctions rationnelles en dehors des racines des polynômes $P_1, \ldots, P_n$).

**e.** Pour $k \in [\![1, n]\!]$, la formule de la question **d.** est valable en $x_k$ et montre que :

$$2x_k - \sum_{i \neq k} \frac{1}{x_k - x_i} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 4x_k Q_k(x_k) - 2Q_k'(x_k) = 0$$

puisque $Q_k(x_k) = \prod_{i \neq k}(x_k - x_i) \neq 0$ sachant que $x_1, \ldots, x_n$ sont deux-à-deux distincts.
Vu les questions **b.** et **c.**, il en ressort que $u$ est point critique de $f$ si, et seulement si, $4x_k S'(x_k) - S''(x_k) = 0$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

**f.** D'après la question **e.**, le point $u$ est critique pour $f$ si, et seulement si, le polynôme $S'' - 4XS'$ s'annule en $x_1, \ldots, x_n$ i.e. est multiple de $S = \prod_{k=1}^{n}(X - x_k)$ puisque $x_1, \ldots, x_n$ sont deux-à-deux distincts. En comparant les degrés, on peut donc énoncer que $u$ est point critique de $f$ si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $S'' - 4XS' = \lambda S$.
Puisque $S$ est unitaire de degré $n$, la seule contribution en $X^n$ dans le polynôme $S'' - 4XS'$ provient de $-4XS'$ et est égale à $-4n$. En identifiant les coefficients de degré $n$ dans la relation précédente, on observe donc que le réel $\lambda$, s'il existe, est nécessairement égal à $-4n$, d'où le résultat.

**4. a.** D'après la question **3.f.**, un point $u = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{D}_n$ est critique pour $f$ si, et seulement si, le polynôme $S = \prod_{k=1}^{n}(X - x_k)$, unitaire (i.e. de coefficient dominant égal à 1) de degré $n$, vérifie $\varphi(S) = 4nS$ i.e. est propre pour $\varphi$ associé à la valeur propre $4n$. Or, d'après **1.d.**, le sous-espace propre de $\varphi$ pour la valeur propre $4n$ est une droite et ne contient donc qu'un seul polynôme unitaire. Les coordonnées de $u$, qui sont les racines de $S$ ordonnées par ordre strictement croissant, sont donc déterminées par $\varphi$, ce qui établit l'unicité d'un éventuel point critique pour $f$.
*Remarque.* On n'a pas justifié l'existence d'un point critique pour $f$ car à ce stade, rien n'assure que le seul polynôme unitaire du sous-espace propre de $\varphi$ pour la valeur propre $4n$ soit scindé à racines simples de degré $n$, i.e. de la forme $S = \prod_{k=1}^{n}(X - x_k)$ avec $x_1 < \cdots < x_n$.

**b.** Dans le cas $n = 3$, le seul vecteur propre unitaire de $\varphi$ pour la valeur propre $4 \cdot 3 = 12$ est le polynôme $X^3 - \frac{3}{4}X = X(X - \frac{\sqrt{3}}{2})(X + \frac{\sqrt{3}}{2})$, qui est bien scindé à racines simples. D'après le raisonnement mené en **a.**, la fonction $f$ admet donc $\big(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\big)$ pour unique point critique.

# Problème

## Première partie

**1. a.** On obtient immédiatement :

$$\forall a \in \mathbb{N}, \quad I_{a,0} = \int_0^1 x^a \,\mathrm{d}x = \frac{1}{a+1}.$$

**b.** Pour $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, les deux fonctions $x \longmapsto x^{a+1}$ et $x \longmapsto (1 - x)^b$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[0, 1]$, et une intégration par parties est donc possible :

$$I_{a,b} = \int_0^1 x^a(1 - x)^b \,\mathrm{d}x = \Big[\frac{x^{a+1}}{a+1}(1 - x)^b\Big]_0^1 + \int_0^1 \frac{x^{a+1}}{a+1} b(1 - x)^{b-1} \,\mathrm{d}x = \frac{b}{a+1} I_{a+1,b-1},$$

le crochet étant nul car $a + 1 > 0$ et $b > 0$.

**c.** On en déduit par récurrence sur $b \in \mathbb{N}$ (en intégrant le $\forall a$ dans le prédicat de récurrence) que :

$$\forall b \in \mathbb{N}, \quad \forall a \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{I}_{a,b} = \frac{b(b-1)\cdots 1}{(a+1)(a+2)\cdots(a+b)}\mathrm{I}_{a+b,0} = \frac{a!b!}{(a+b+1)!}.$$

En effet, la formule a été établie pour $b = 0$ en **a.** et si, pour $b \in \mathbb{N}^*$ donné, elle est acquise au rang $b-1$ alors, d'après **b.**,

$$\forall a \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{I}_{a,b} = \frac{b}{a+1}\mathrm{I}_{a+1,b-1} = \frac{b}{a+1}\frac{(a+1)!(b-1)!}{(a+b+1)!} = \frac{a!b!}{(a+b+1)!}$$

si bien que la formule est encore valable au rang $b$.

**d.** La fonction $f_{a,b}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ et positive sur $\mathbb{R}$. La fonction $f_{a,b}$ étant continue sur [3] le segment $[0, 1]$ et nulle en dehors, son intégrale converge avec :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{(a+b+1)!}{a!b!}\int_0^1 x^a(1-x)^b\,\mathrm{d}x = 1$$

d'après **c.**. Toutes les conditions sont donc réunies pour que $f_{a,b}$ soit une densité de probabilité.

**2.** On peut noter pour commencer que X est presque sûrement à valeurs dans $[0, 1]$ donc bornée, si bien qu'elle admet des moments à tout ordre.

**a.** Il vient d'après **1.c.** :

$$\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{a,b}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\mathrm{I}_{a,b}}\int_0^1 x^{a+1}(1-x)^b\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{I}_{a+1,b}}{\mathrm{I}_{a,b}} = \frac{a+1}{a+b+2}.$$

**b.** On a de même :

$$\mathbb{E}(\mathrm{X}^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{a,b}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\mathrm{I}_{a,b}}\int_0^1 x^{a+2}(1-x)^b\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{I}_{a+2,b}}{\mathrm{I}_{a,b}} = \frac{(a+2)(a+1)}{(a+b+3)(a+b+2)}$$

d'où, d'après la formule de Kœnig-Huygens,

$$\mathbb{V}(\mathrm{X}) = \mathbb{E}(\mathrm{X}^2) - \mathbb{E}(\mathrm{X})^2 = \frac{(a+1)(b+1)}{(a+b+3)(a+b+2)^2}.$$

**c.** La fonction proposée est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, 1[$ avec, pour $x \in ]0, 1[$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}'(x) &= (a+b+1)!\sum_{k=a+1}^{a+b+1} \frac{kx^{k-1}(1-x)^{a+b+1-k} - (a+b+1-k)x^k(1-x)^{a+b-k}}{k!(a+b+1-k)!} \\
&= (a+b+1)!\Big[\sum_{k=a+1}^{a+b}\Big(\frac{x^{k-1}(1-x)^{a+b-(k-1)}}{(k-1)!\big(a+b-(k-1)\big)!} - \frac{x^k(1-x)^{a+b-k}}{k!(a+b-k)!}\Big) + \frac{x^{a+b}}{(a+b)!}\Big]
\end{aligned}$$

car pour $k = a+b+1$, le deuxième terme est nul d'où, par télescopage,

$$= (a+b+1)!\Big[\Big(\frac{x^a(1-x)^b}{a!b!} - \frac{x^{a+b}}{(a+b)!}\Big) + \frac{x^{a+b}}{(a+b)!}\Big] = \frac{(a+b+1)!}{a!b!}x^a(1-x)^b = f_{a,b}(x).$$

C'est donc une primitive de $f_{a,b}$ sur $]0, 1[$, qui s'annule en 0 comme le montre un calcul direct.
La variable à densité X prenant presque sûrement ses valeurs dans $]0, 1]$, on a déjà $\mathbb{P}(\mathrm{X} \leqslant x) = \mathrm{F}(x)$ pour $x \notin ]0, 1[$ (le calcul donne $\mathrm{F}(1) = 1$ : seul le terme d'indice $k = a+b+1$ n'est pas nul). Pour $x \in ]0, 1[$,

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f_{a,b}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x f_{a,b}(t)\,\mathrm{d}t = \big[\mathrm{F}(t)\big]_0^x = \mathrm{F}(x).$$

La variable X admet donc F pour fonction de répartition.

## Deuxième partie

**3.** Au cours des $n$ tirages, on peut tirer un nombre quelconque de boules rouges compris entre 0 et $n$ : $\mathrm{X}_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

**4.** Le choix des noms des fonctions `experience` et `simulation` est très discutable...

3. Au sens où sa restriction à $[0, 1]$ est continue.

**a.** Au cours d'un tel tirage, on obtient une boule rouge avec probabilité $p = \frac{x}{x+y}$. Puisque l'instruction `rand()<p` simule un événement de probabilité $p$, la fonction codée ci-dessous simule le tirage considéré.

**Listing 1** : simulation d'un tirage

```
function res=tirage(x,y)
  r=rand();
  if (r<x/(x+y)) then
    res=0;
  else
    res=1;
  end
endfunction
```

*Remarque.* Dans le code ci-dessus, le bloc `if...then...else...end` peut être remplacé par l'instruction plus courte `res=(r>x/(x+y))`, où `r>x/(x+y)` est un booléen, assimilé à `0` ou `1`.

**b.** La fonction ci-dessous simule les $n$ tirages en modifiant la composition de l'urne entre chacun d'eux.

**Listing 2** : simulation de l'expérience

```
function Xn=experience(a,b,n)
  x=a;   // nombre initial de boules rouges dans l'urne
  y=b;   // nombre initial de boules blanches dans l'urne
  for k=1:n
    r=tirage(x,y);
    if (r==0) then  // on a tiré une boule rouge
      x=x+1;        // on ajoute une boule rouge dans l'urne
    else
      y=y+1;        // on ajoute une boule blanche dans l'urne
    end
  end
  Xn=x-a;
endfunction
```

**c.** On approche la loi de $X_n$ en utilisant la méthode de Monte-Carlo (basée sur la loi des grands nombres), qui consiste à approcher la probabilité $\mathbb{P}(X_n = k)$ par la fréquence de réalisation de l'événement $[X_n = k]$ au cours d'un grand nombre de simulations.
Dans la fonction proposée ci-dessous, on réalise $m$ simulations de la variable $X_n$ et on utilise le vecteur `loi` pour compter le nombre de réalisations de chacun des événements $[X_n = k]$, $0 \leqslant k \leqslant n$, avant de le diviser par $m$ pour obtenir les fréquences de réalisation.

**Listing 3** : approximation de la loi de $X_n$ par simulations

```
function loi=simulation(a,b,n,m)
  loi=zeros(1,n+1);
  for j=1:m
    x=experience(a,b,n)+1;
    loi(x)=loi(x)+1;  // on incrémente le compteur correspondant
                      // au résultat observé
  end
  loi=loi/m;
endfunction
```

*Remarque.* Dans le code ci-dessus, un décalage est imposé par la syntaxe Scilab : les éléments du vecteur `loi` sont numérotés de `1` à `n+1`. Le contenu de `loi(k)` se rapporte donc à $\mathbb{P}(X = k - 1)$ pour $1 \leqslant k \leqslant n + 1$.

**5.** Il aurait été plus judicieux d'utiliser l'instruction `bar(0:n, simulation(1,1,n,10^5))` pour avoir en abscisses les valeurs prises par la variable $X_n$ (elles sont numérotées de 1 à $n+1$ dans les sorties graphiques proposées, alors qu'elles devraient l'être entre 0 et $n$).

**a.** Le nombre de simulations étant assez grand, on peut considérer que l'approximation par la méthode de Monte-Carlo est acceptable. Les sorties graphiques proposées conduisent à conjecturer que la variable $X_n$ suit la loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$.

**b.** La variable $X_1$ est la variable de Bernoulli associée à l'expérience constituée d'un unique tirage dans une urne contenant une boule rouge et une boule blanche, dans laquelle le succès est l'apparition d'une boule rouge. Elle suit donc la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire la loi uniforme sur $\{0, 1\}$, en accord avec le résultat conjecturé en **a.**.

**c.** Sachant l'événement $[X_n = k]$ réalisé, l'événement $[X_{n+1} = \ell]$ se réalise si, et seulement si, on tire $\ell - k$ boules rouges au cours du $n+1$-ième tirage, dans une urne qui contient $n+2$ boules dont $k+1$ rouges. Ainsi :

$$\forall \ell \in [\![0, n+1]\!]\,, \quad \mathbb{P}_{[X_n=k]}(X_{n+1} = \ell) = \begin{cases} \frac{n-k+1}{n+2} & \text{si } \ell = k \\ \frac{k+1}{n+2} & \text{si } \ell = k+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

**d.** Le résultat a été établi pour $n = 1$ dans la question **b.**. S'il est acquis à un rang $n \in \mathbb{N}^*$ alors, d'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet associé à la variable $X_n$ et vu **c.**, on obtient pour $\ell \in [\![1, n]\!]$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+1} = \ell) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X_n = k)\, \mathbb{P}_{[X_n=k]}(X_{n+1} = \ell) \\ &= \mathbb{P}(X_n = \ell - 1)\, \mathbb{P}_{[X_n=\ell-1]}(X_{n+1} = \ell) + \mathbb{P}(X_n = \ell)\, \mathbb{P}_{[X_n=\ell]}(X_{n+1} = \ell) \\ &= \frac{1}{n+1}\Big(\frac{\ell}{n+2} + \frac{n-\ell+1}{n+2}\Big) = \frac{1}{n+2} \end{aligned}$$

et la formule est encore valable pour $\ell = 0$ (resp. $\ell = n+1$) : dans ce cas, l'événement $[X_n = \ell - 1]$ (resp. $[X_n = \ell]$) est impossible mais l'expression utilisée pour $\mathbb{P}_{[X_n=\ell-1]}(X_{n+1} = \ell)$ (resp. $\mathbb{P}_{[X_n=\ell]}(X_{n+1} = \ell)$) est nulle et le calcul demeure donc correct. Ainsi $X_{n+1}$ suit la loi uniforme sur $[\![0, n+1]\!]$, ce qui constitue le résultat au rang $n+1$.

**6. a.** On utilise la formule des probabilités composées en calculant les probabilités conditionnelles avec un raisonnement similaire à celui utilisé en **5.c.** :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(R_1 \cap \cdots \cap R_k \cap \overline{R_{k+1}} \cap \cdots \cap \overline{R_n}) &= \mathbb{P}(R_1)\, \mathbb{P}_{R_1}(R_2) \cdots \mathbb{P}_{R_1 \cap \cdots \cap R_{k-1}}(R_k) \times \\ &\quad \times \mathbb{P}_{R_1 \cap \cdots \cap R_k}(\overline{R_{k+1}})\, \mathbb{P}_{R_1 \cap \cdots \cap R_k \cap \overline{R_{k+1}}}(\overline{R_{k+2}}) \cdots \mathbb{P}_{R_1 \cap \cdots \cap R_k \cap \overline{R_{k+1}} \cap \cdots \cap \overline{R_{n-1}}}(\overline{R_n}) \\ &= \frac{a}{a+b}\frac{a+1}{a+b+1} \cdots \frac{a+k-1}{a+b+k-1} \times \\ &\quad \times \frac{b}{a+b+k}\frac{b+1}{a+b+k+1} \cdots \frac{b+n-k-1}{a+b+n-1} \\ &= \frac{\frac{(a+k-1)!}{(a-1)!}\frac{(b+n-k-1)!}{(b-1)!}}{\frac{(a+b+n-1)!}{(a+b-1)!}} = \frac{(a+k-1)!(b+n-k-1)!(a+b-1)!}{(a-1)!(b-1)!(a+b+n-1)!}. \end{aligned}$$

**b.** L'événement $[X_n = k]$ est l'union disjointe des événements

$$\bigcap_{i \in I} R_i \cap \bigcap_{i \notin I} \overline{R_i}$$

lorsque I décrit l'ensemble des parties à $k$ éléments de $[\![1, n]\!]$. Ces parties sont au nombre de $\binom{n}{k}$ et, pour chacune d'elles, l'événement précédent a même probabilité que celui étudié à la question **a.**. En effet, le même raisonnement conduira à une expression similaire où le dénominateur sera identique et le numérateur formé des mêmes facteurs mais dans un ordre différent. Finalement, on a donc :

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \binom{n}{k}\frac{(a+k-1)!(b+n-k-1)!(a+b-1)!}{(a-1)!(b-1)!(a+b+n-1)!}.$$

**c.** Pour $k \in [\![0, n]\!]$, l'expression obtenue en **b.** donne :

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{(a+k-1)!(b+n-k-1)!(a+b-1)!}{(a-1)!(b-1)!(a+b+n-1)!}$$
$$= \frac{(a+k-1)!}{(a-1)!k!}\frac{(b+n-k-1)!}{(b-1)!(n-k)!}\frac{(a+b-1)!n!}{(a+b+n-1)!} = \frac{\binom{a+k-1}{a-1}\binom{b+n-k-1}{b-1}}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}}.$$

**d.** En écrivant que $\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X_n = k) = 1$, on obtient la formule

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{a+k-1}{a-1}\binom{b+n-k-1}{b-1} = \binom{a+b+n-1}{a+b-1}, \tag{1}$$

valable pour tous $a, b, n \in \mathbb{N}^*$.
On peut alors écrire, en appliquant le théorème de transfert à la variable finie $a + X_n$ et la formule d'absorption,

$$\mathbb{E}(a+X_n) = \sum_{k=0}^{n}(a+k)\frac{\binom{a+k-1}{a-1}\binom{b+n-k-1}{b-1}}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}} = \frac{a}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}}\sum_{k=0}^{n}\binom{a+k}{a}\binom{b+n-k-1}{b-1}$$

puis, d'après la formule (1) appliquée à $a+1$ et $b$ et de nouveau la formule d'absorption,

$$\mathbb{E}(a+X_n) = \frac{a}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}}\binom{a+b+n}{a+b} = a\frac{a+b+n}{a+b}.$$

Par suite,

$$\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(a+X_n) - a = a\Big(\frac{a+b+n}{a+b} - 1\Big) = \frac{na}{a+b}.$$

## Troisième partie

**7. a.** Sachant que $X_n$ prend des valeurs positives ou nulles, il en va de même de $Y_n$ et l'on a donc $F_n(x) = \mathbb{P}(Y_n \leqslant x) = 0$ pour tout $x < 0$.

**b.** En raisonnant de même à partir de $X_n \leqslant n$, on obtient $Y_n \leqslant 1$ d'où $F_n(x) = \mathbb{P}(Y_n \leqslant x) = 1$ pour tout $x \geqslant 1$.

**8. a.** Puisque $X_n$ est à valeurs entières, les événements $[X_n \leqslant y]$ et $[X_n \leqslant \lfloor y \rfloor]$ sont égaux pour $y \in \mathbb{R}$. On a donc :

$$F_n(x) = \mathbb{P}(Y_n \leqslant x) = \mathbb{P}(X_n \leqslant nx) = \mathbb{P}(X_n \leqslant \lfloor nx \rfloor).$$

**b.** D'après **a.** et **6.c.**,

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{1}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}}\sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor}\binom{a+k-1}{a-1}\binom{b+n-k-1}{b-1}.$$

La formule sommatoire admise appliquée à l'entier $p = \lfloor nx \rfloor + a$ (on a bien $a \leqslant p \leqslant a + nx \leqslant a + n + b - 1$) permet de poursuivre le calcul :

$$F_n(x) = \frac{1}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}}\sum_{i=a}^{a+b-1}\binom{\lfloor nx \rfloor + a}{i}\binom{b+n-1-\lfloor nx \rfloor}{a+b-1-i}.$$

**c.** Pour $j \in \mathbb{N}$ donné,

$$\binom{m}{j} = \frac{m(m-1)\cdots(m-j+1)}{j!} \sim \frac{m^j}{j!}, \quad m \to \infty.$$

**d.** Des inégalités qui définissent la partie entière, on déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 - \frac{1}{nx} \leqslant \frac{\lfloor nx \rfloor}{nx} \leqslant 1$$

d'où il ressort, par encadrement, que $\frac{\lfloor nx \rfloor}{nx} \to 1$ i.e. qu'on a l'équivalent $\lfloor nx \rfloor \sim nx$ lorsque $n \to \infty$.
Pour $i \in [\![a, a+b-1]\!]$, on a donc

$$b + n - 1 - \lfloor nx \rfloor = b - 1 + n\Big(1 - \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}\Big) \sim n(1-x) \to +\infty, \quad n \to \infty$$

d'où, d'après **c.** :

$$\frac{\binom{\lfloor nx\rfloor+a}{i}\binom{b+n-1-\lfloor nx\rfloor}{a+b-1-i}}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}} \sim \frac{\frac{(\lfloor nx\rfloor+a)^i}{i!}\,\frac{(b+n-1-\lfloor nx\rfloor)^{a+b-1-i}}{(a+b-1-i)!}}{\frac{(a+b+n-1)^{a+b-1}}{(a+b-1)!}}, \quad n\to\infty$$

c'est-à-dire, puisque les exposants sont fixes,

$$\begin{aligned}\frac{\binom{\lfloor nx\rfloor+a}{i}\binom{b+n-1-\lfloor nx\rfloor}{a+b-1-i}}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}} &\sim \frac{(a+b-1)!}{i!(a+b-1-i)!}\,\frac{(nx)^i\big(n(1-x)\big)^{a+b-1-i}}{n^{a+b-1}} \\ &\to \binom{a+b-1}{i}x^i(1-x)^{a+b-1-i}\end{aligned}, \quad n\to\infty.$$

On en déduit d'après **b.** (le nombre de termes de la somme est indépendant de $n$) que :

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{F}_n(x) = \sum_{i=a}^{a+b-1}\binom{a+b-1}{i}x^i(1-x)^{a+b-1-i}.$$

**9.** Il vient :

$$\begin{aligned}\mathrm{F}_n(0) = \mathbb{P}(\mathrm{Y}_n \leqslant 0) = \mathbb{P}(\mathrm{X}_n \leqslant 0) = \mathbb{P}(\mathrm{X}_n = 0) &= \frac{\binom{b+n-1}{b-1}}{\binom{a+b+n-1}{a+b-1}} \\ \sim \frac{\frac{(b+n-1)^{b-1}}{(b-1)!}}{\frac{(a+b+n-1)^{a+b-1}}{(a+b-1)!}} \sim \frac{(a+b-1)!}{(b-1)!}\,\frac{n^{b-1}}{n^{a+b-1}} &\to 0\end{aligned}, \quad n\to\infty.$$

**10.** D'après **2.c.**, **7.**, **8.d.** et **9.**, on a :

$$\forall x\in\mathbb{R}, \quad \mathrm{F}_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{F}_{\mathrm{Y}}(x)$$

où Y est une variable aléatoire de loi $\beta(a-1, b-1)$. Cela traduit la convergence en loi de la suite $(\mathrm{Y}_n)$ vers Y.

**11.** D'après **2.a.** et **6.d.**,

$$\mathbb{E}(\mathrm{Y}_n) = \frac{\mathbb{E}(\mathrm{X}_n)}{n} = \frac{a}{a+b} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{a}{a+b} = \mathbb{E}(\mathrm{Y}),$$

mais ce n'est pas une conséquence de la convergence en loi de la suite $(\mathrm{Y}_n)$ vers Y établie en **11.**.