Devoir libre 12 (facultatif)

À rendre lundi 14 janvier 2019

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES II

Lundi 10 Mai 2004, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

L'objet de ce problème est la recherche et l'étude de lois possédant une propriété, dite de *stabilité*, qui intervient dans la modélisation de nombreux phénomènes satisfaisant une certaine invariance d'échelle.

• Soit X une variable aléatoire réelle. On dit qu'une suite $(X_k)_{k\geqslant 1}$ de variables aléatoires est une *suite de copies* de X si $(X_k)_{k\geqslant 1}$ est une suite de variables *indépendantes* ayant toutes *même loi* que X.

• On dit qu'une variable aléatoire réelle X suit une loi *stable* si il existe une suite réelle strictement positive $(a_n)_{n\geqslant 1}$ telle que, pour toute suite $(X_k)_{k\geqslant 1}$ de copies de X et pour tout entier n supérieur ou égal 1, $X_1 + ... + X_n$ et $a_n X$ ont même loi. On vérifie facilement l'unicité de la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ si X n'est pas nulle presque sûrement. On dira alors que $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est la *suite associée* à la loi de X.

On note $\mathbb{N}^\star$ l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à 1 (*i.e.* $\{1, 2, 3, ...\}$).

On admettra que

$$\forall A > 0, \quad \arctan A + \arctan \frac{1}{A} = \frac{\pi}{2}$$

où l'expression arctan désigne la *fonction réciproque* de la restriction de la fonction tangente à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

I. Un résultat sur certaines suites positives

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels *strictement positifs* vérifiant les deux propriétés suivantes:

- pour tout couple d'entiers $(m, n) \in \mathbb{N}^{\star 2}$, $u_{mn} = u_m u_n$,
- il existe un réel strictement positif A tel que, pour tout couple $(m, n) \in \mathbb{N}^{\star 2}$, si $m \leq n$, alors $u_m \leqslant A u_n$.

On veut montrer qu'il existe un réel positif α tel que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n = n^\alpha$.

1) Montrer que $u_1 = 1$.

2) Montrer que, pour tout couple $(r, k) \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}$, $u_{r^k} = u_r^k$.

3) Soit $r \in \mathbb{N}^*, r \geqslant 2$. Montrer qu'il existe un réel α_r tel que, pour tout entier n de la forme r^k, où k est un entier positif, $u_n = n^{\alpha_r}$. Exprimer α_r en fonction de r et de u_r.

4) Soit $(r_1, r_2) \in \mathbb{N}^{*2}$, $r_2 > r_1 \geqslant 2$. On introduit alors les réels α_{r_1} et α_{r_2} définis selon la question précédente.

a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un entier ℓ tel que $r_2^k \leqslant r_1^\ell < r_2^{k+1}$.

b) En déduire que $(r_2^k)^{\alpha_{r_2}} \leqslant A(r_2^{k+1})^{\alpha_{r_1}}$ et $(r_2^k)^{\alpha_{r_1}} \leqslant A(r_2^{k+1})^{\alpha_{r_2}}$.

c) En faisant tendre k vers l'infini, déduire l'égalité $\alpha_{r_1} = \alpha_{r_2}$. Conclure.

II. La loi gaussienne

A. On rappelle l'expression de la densité d'une variable gaussienne de moyenne m et de variance σ^2 :

$$f_{m,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\Big(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\Big).$$

1) Soit a un réel *strictement positif* et b et c deux réels quelconques.

Trouver trois réels α, m, σ, que l'on exprimera en fonction de a, b, c tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} + \alpha = ax^2 + bx + c$$

2) En déduire que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\big(-(ax^2+bx+c)\big)dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\Big(\frac{b^2-4ac}{4a}\Big)$.

3) Soient G et G' deux variables aléatoires gaussiennes *centrées indépendantes* de variances respectives σ^2 et σ'^2. **Redémontrer** en calculant la densité de la loi de $G+G'$, que $G+G'$ est une variable gaussienne dont on donnera l'espérance et la variance.

4) Montrer que G suit une loi stable. Quelle est la suite associée à la loi de G ?

B. Dans cette section, X est une variable aléatoire qui suit une loi *stable* et qui admet une espérance m et une variance σ^2 *strictement positive. On ne suppose pas que X suit une loi gaussienne.* Soit $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de copies de X et $(a_k)_{k\geqslant 1}$ la suite associée à la loi de X.

1) En considérant les variances de $X_1 + \ldots + X_n$ et de $a_n X$, donner, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de a_n. Montrer que $m = 0$.

2) En appliquant le théorème de la limite centrée, montrer que X suit une loi gaussienne.

III. La loi de Cauchy

1) Soit $a > 0$. Vérifier que la fonction $f_a : x \mapsto \dfrac{a}{\pi(x^2+a^2)}$ est bien une densité de probabilité. (On utilisera le changement de variable $x = a \tan t$).

On dit qu'une variable aléatoire suit la loi de Cauchy de paramètre a si elle admet la fonction f_a pour densité.

2) Soit Z une variable aléatoire suivant la loi de Cauchy de paramètre *égal à* 1.

a) La variable Z admet-elle une espérance ?

b) Soit $\lambda > 0$. Quelle est la loi de λZ ?

3) Soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 à *coefficients réels.* Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes *distincts* de partie imaginaire *strictement positive.* Montrer que si z_1 et z_2 sont des racines de P, alors $P = 0$. (On remarquera que $\overline{z}_1$ et $\overline{z}_2$ sont également racines de P.)

4) Soient $a, a' > 0$, et $y \in \mathbb{R}^\star$. Soient u, u', v, v' quatre réels tels que

$$u + iv = \frac{a'}{\pi((y - ia)^2 + a'^2)} \quad \text{et} \quad u' + iv' = \frac{a}{\pi((y + ia')^2 + a^2)}$$

où i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

a) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{aa'}{\pi^2(x^2 + a^2)((x - y)^2 + a'^2)} = \frac{vx + au}{\pi(x^2 + a^2)} + \frac{v'(x - y) + a'u'}{\pi((x - y)^2 + a'^2)} \quad (\star)$$

(On multipliera les deux membres de $(\star)$ par leur dénominateur commun et on appliquera la question précédente en prenant $z_1 = ia$ et $z_2 = y + ia'$.)

b) On admet les égalités suivantes :

$$u + iv = \frac{a'(y^2 + a'^2 - a^2) + 2iaa'y}{\pi(y^2 + (a + a')^2)(y^2 + (a - a')^2)}$$

$$u' + iv' = \frac{a(y^2 + a^2 - a'^2) - 2iaa'y}{\pi(y^2 + (a + a')^2)(y^2 + (a - a')^2)}$$

Montrer que :

$$u + u' = \frac{a + a'}{\pi(y^2 + (a + a')^2)}.$$

5) Soit $B > 0$. Calculer $\displaystyle\int_{-B}^{B} \frac{x}{x^2 + a^2}dx$ et $\displaystyle\int_{-B}^{B} \frac{x - y}{(x - y)^2 + a^2}dx$.

6) Soient Z_a et $Z_{a'}$ deux variables aléatoires *indépendantes* suivant des lois de Cauchy de paramètres respectifs a et a'. Montrer que la valeur de la densité de la loi de $Z_a + Z_{a'}$ au point y est égale à $u + u'$ (cf. question 4). En déduire la loi de $Z_a + Z_{a'}$.

7) En déduire que Z suit une loi stable. Quelle est la suite associée à la loi de Z ?

IV. Les événements exceptionnels

Du fait de la décroissance rapide à l'infini de la fonction densité des variables gaussiennes, celles-ci n'accordent que peu d'importance aux valeurs extrêmes. Aussi, pour inclure, dans un modèle mathématique, l'éventualité de phénomènes extrêmes, on est amené à privilégier des lois dont la fonction densité décroît moins vite à l'infini. Le but de cette partie est d'étudier ce qu'il en est pour la loi de Cauchy.

Dans cette partie, $(X_i)_{i \geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires *indépendantes* suivant la loi de Cauchy de *paramètre* 1.

On dira qu'un événement exceptionnel s'est produit avant l'instant n, si il existe un entier k inférieur ou égal à n tel que, pour tout entier i inférieur ou égal à n et *différent* de k, $|X_k| > 2|X_i|$. Autrement dit, à l'instant n, la variable la plus forte de l'histoire (en valeur absolue) est supérieure au double de chacune des autres variables. On appellera E_n un tel événement. Ainsi,

$$E_n = \bigcup_{k=1}^{n} \Big(\bigcap_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq k}} (|X_k| > 2|X_i|) \Big)$$

1) Montrer que :

$$P(E_n) = nP\Big(\bigcap_{i=2}^{n} (|X_1| > 2|X_i|)\Big).$$

2) En déduire que :

$$\forall A > 0, \quad P(E_n) \geqslant nP\Big((|X_1| > 2A) \cap \big(\bigcap_{i=2}^{n}(|X_i| < A)\big)\Big).$$

3) Montrer que : $\forall A > 0$, $P(|X_1| > A) = \dfrac{2}{\pi} \arctan \dfrac{1}{A}$.

4) Soit $\lambda > 0$, et n assez grand pour que $\dfrac{\pi\lambda}{2n} < \dfrac{\pi}{2}$. En choisissant $A = \dfrac{1}{\tan \frac{\pi\lambda}{2n}}$, montrer que

$$P(E_n) \geqslant nP\Big(|X_1| > \frac{2}{\tan \frac{\pi\lambda}{2n}}\Big)\big(1 - \frac{\lambda}{n}\big)^{n-1}$$

5) Soit $\varepsilon > 0$ et $\lambda > 0$. Montrer que, pour tout entier n assez grand, $P(E_n) > \dfrac{\lambda}{2} e^{-\lambda} - \varepsilon$.

6) En déduire que, pour tout entier n assez grand, $P(E_n) > \dfrac{1}{6}$.

V. Le nombre a_n est une puissance de n

Soit X une variable aléatoire suivant une loi *stable*. Soit $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de copies de X et $(a_k)_{k\geqslant 1}$ la suite associée à la loi de X.

A. Une variable aléatoire X est dite *symétrique* si elle a la même loi que la variable $-X$. Autrement dit, pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$, $P(X \in I) = P(-X \in I)$ (exemple : une variable gaussienne centrée).

Dans cette section, on suppose X *non nulle et symétrique*.

1) Montrer que $P(X > 0) = \frac{1}{2}(1 - P(X = 0))$.

2) Montrer qu'il existe $\mu > 0$ tel que $P(X > \mu) > 0$.

3) a) Montrer que, pour tout couple $(m, n) \in \mathbb{N}^{\star 2}$, $a_{m+n}X$ a même loi que $a_m X_1 + a_n X_2$.

b) En déduire que, pour tout k-uplet d'entiers $(m_1, ..., m_k)$, $a_{m_1 + \ldots + m_k} X$ a même loi que $a_{m_1} X_1 + \ldots + a_{m_k} X_k$.

c) En prenant tous les entiers m_i égaux à un même entier ℓ, montrer que $a_{k\ell} = a_k a_\ell$.

4) En considérant l'événement $(X_1 \geqslant 0) \cap (X_2 > t)$, montrer en utilisant la question V.A.3.a, que pour tout couple $(m, n) \in \mathbb{N}^{\star 2}$, et pour tout $t > 0$,

$$P(X > \frac{a_n}{a_{m+n}} t) \geqslant \frac{1}{2} P(X > t).$$

5) En utilisant la question V.A.2., montrer que l'ensemble $\left\{\dfrac{a_n}{a_{n+m}} : (m, n) \in \mathbb{N}^{\star 2}\right\}$ est majoré. En déduire l'existence d'un réel α tel que, pour tout entier naturel non nul n, $a_n = n^\alpha$.

B. On suppose que X suit une loi stable à densité, mais on ne suppose plus que X est symétrique.

1) Montrer que la variable $X_1 - X_2$ est symétrique.

2) Montrer que $X_1 - X_2$ suit une loi stable. Soit $(b_n)_{n\geqslant 1}$ la suite associée à la loi de $X_1 - X_2$. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $a_n = b_n$. Conclure.