Travaux dirigés

Probabilités générales et discrètes

ECS2 – Lycée La Bruyère, Versailles

Année 2014/2015

Exercice 2

Question 1

Si le jeu n'est pas fini au bout de $2n$ parties et si l'on note α (resp. β) le nombre de victoires de A (resp. B) au cours des $2n$ parties, alors $|\alpha - \beta| \leqslant 1$. Par ailleurs $\alpha + \beta = 2n$ donc α et β sont de même parité. Dans ces conditions, $\alpha - \beta = (\alpha + \beta) - 2\beta$ est lui aussi pair et l'on a donc nécessairement $\alpha - \beta = 0$ i.e. $\alpha = \beta$: les joueurs A et B sont à égalité.

Exercice 2

Question 2

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k l'événement « le joueur A remporte la k-ième partie » (ce qui suppose que celle-ci ait bien lieu) et on définit de même B_k.

D'après la question **1.**, l'événement C_{n+1} est réalisé si, et seulement si, l'événement C_n est réalisé et A et B gagnent chacun l'une des parties numérotées $2n+1$ et $2n+2$. En d'autres termes,

$$C_{n+1} = C_n \cap \big((A_{2n+1} \cap B_{2n+2}) \cup (B_{2n+1} \cap A_{2n+2})\big)$$

mais les événements A_{2n+1}, B_{2n+1}, A_{2n+2} et B_{2n+2} ne sont pas indépendants de C_n. On peut toutefois écrire :

$$\mathbb{P}(C_{n+1}) = \mathbb{P}(C_n)\,\mathbb{P}_{C_n}\big((A_{2n+1} \cap B_{2n+2}) \cup (B_{2n+1} \cap A_{2n+2})\big).$$

On poursuit le calcul en utilisant l'incompatibilité des événements $A_{2n+1} \cap B_{2n+2}$ et $B_{2n+1} \cap A_{2n+2}$:

$$p_{n+1} = p_n\big(\mathbb{P}_{C_n}(A_{2n+1} \cap B_{2n+2}) + \mathbb{P}_{C_n}(B_{2n+1} \cap A_{2n+2})\big)$$

puis l'indépendance de A_{2n+1} et B_{2n+2} conditionnellement à C_n (c'est-à-dire sachant que les parties $2n+1$ et $2n+2$ sont jouées) :

$$p_{n+1} = p_n\big(\mathbb{P}_{C_n}(A_{2n+1})\,\mathbb{P}_{C_n}(B_{2n+2}) + \mathbb{P}_{C_n}(B_{2n+1}\,\mathbb{P}_{C_n}(A_{2n+2})\big) = \varrho p_n$$

où $\varrho = 2p(1-p)$.

La suite (p_n) est donc géométrique de raison ϱ et de premier terme $p_0 = 1$ d'où l'on déduit que $p_n = \varrho^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2

Question 3

On note V^A l'événement « A emporte la victoire » et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, V_n^A l'événement « A emporte la victoire au bout de $2n$ parties ».

D'après la question **1.**, l'événement V_n^A est réalisé si, et seulement si, les joueurs sont à égalité après $2n-2$ parties puis A remporte les deux parties suivantes. Pour les mêmes raisons qu'en **2.**, on a donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(V_n^A) &= \mathbb{P}(C_{n-1} \cap A_{2n-1} \cap A_{2n}) \\ &= \mathbb{P}(C_{n-1})\,\mathbb{P}_{C_{n-1}}(A_{2n-1})\,\mathbb{P}_{C_{n-1}}(A_{2n}) \\ &= p_n p^2 = p^2 \varrho^{n-1}.\end{aligned}$$

Étant entendu, pour des raisons évidentes, que

$$V^A = \bigcup_{n \geqslant 1} V_n^A$$

où l'union est disjointe, il vient :

$$\mathbb{P}(V^A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(V_n^A) = \sum_{n=1}^{\infty} p^2 \varrho^{n-1} = \frac{p^2}{1-\varrho}.$$

Exercice 2

Question 4

On montrerait de même que l'événement V^B « le joueur B est victorieux » a pour probabilité

$$\mathbb{P}(V^B) = \frac{(1-p)^2}{1-\varrho}.$$

Les deux événements V^A et V^B sont bien entendu incompatibles et l'on a donc d'après les formules précédentes :

$$\mathbb{P}(V^A \cup V^B) = \frac{p^2 + (1-p)^2}{1-\varrho} = 1.$$

L'événement $V^A \cup V^B$, qui se produit si, et seulement si, l'un des joueurs A et B finit par l'emporter, est donc certain.

Exercice 4

Question 1

Pour $k \in [\![0, N]\!]$, on note U_k l'événement « choisir l'urne k », de probabilité $\mathbb{P}(U_k) = \frac{1}{N+1}$ puisque l'urne est choisie au hasard parmi N. Les événements $U_0, \ldots, U_N$ formant un système complet, la probabilité de l'événement A_N « obtenir n boules blanches au cours des n tirages » est donnée par :

$$\mathbb{P}(A_N) = \sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}(U_k)\,\mathbb{P}_{U_k}(A_N)$$

d'après la formule des probabilités totales. Or, pour $k \in [\![0, N]\!]$, si l'événement U_k est réalisé, alors les n tirages sont indépendants et amènent chacun une boule blanche avec probabilité $\frac{k}{N}$, d'où :

$$\mathbb{P}_{U_k}(A_N) = \left(\frac{k}{N}\right)^n.$$

Par conséquent,

$$\mathbb{P}(A_N) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^n.$$

Exercice 4

Question 2

On peut écrire $\mathbb{P}(A_N) = \frac{N}{N+1} S_N$ où

$$S_N = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^n = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^n$$

est une somme de Riemann associée à la fonction $f : x \longmapsto x^n$ sur $[0,1]$. La fonction f étant continue sur le segment $[0,1]$, on a par théorème

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}.$$

En conclusion,

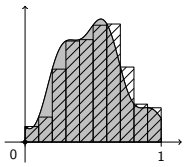
$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}(A_N) = \frac{1}{n+1}.$$

Rappels sur les sommes de Riemann (zoom)

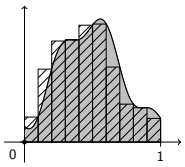
Théorème (Sommes de Riemann ou méthode des rectangles)

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right).$$



rectangles gauche



rectangles droite

Rappels sur les sommes de Riemann

Théorème (Sommes de Riemann ou méthode des rectangles)

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right).$$

En particulier, si f est continue sur $[0,1]$, on a :

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

rectangles gauche
$n = 10$

rectangles gauche
$n = 25$

rectangles droite
$n = 25$

rectangles droite
$n = 10$

Exercice 5

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'événement P_n : « le n-ième lancer renvoie pile » a pour probabilité p. Le théorème de la limite monotone assure que

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{n\geqslant 1}\overline{P_n}\Big) = \lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=1}^{n}\overline{P_k}\Big)$$

c'est-à-dire, puisque les événements P_n, $n \in \mathbb{N}$, sont mutuellement indépendants :

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{n\geqslant 1}\overline{P_n}\Big) = \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\mathbb{P}(\overline{P_k}) = \lim_{n\to\infty}(1-p)^n = 0.$$

L'événement

$$\overline{\bigcap_{n\geqslant 1}\overline{P_n}} = \bigcup_{n\geqslant 1} P_n$$

est donc certain, or cet événement est réalisé si, et seulement si, l'un des lancers renvoie pile, d'où le résultat.

Exercice 6

Question 1

Pour tout $k \geqslant 1$, on note C_k l'événement « le candidat est invité à répondre à la k-ième question et y apporte une réponse correcte ».
La variable X est à valeurs dans $\mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ car le candidat répond presque sûrement correctement à la première question.
Pour $k \geqslant 2$, l'événement $[X = k]$ est réalisé si, et seulement si, le candidat apporte une réponse correcte aux $k-1$ premières questions et une réponse incorrecte à la k-ième :

$$[X = k] = C_1 \cap C_2 \cap \cdots \cap C_{k-1} \cap \overline{C_k}.$$

D'après la formule des probabilités composées,

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(C_1)\,\mathbb{P}_{C_1}(C_2)\,\mathbb{P}_{C_1\cap C_2}(C_2)\cdots\mathbb{P}_{C_1\cap\cdots\cap C_{k-2}}(C_{k-1})\,\mathbb{P}_{C_1\cap\cdots\cap C_{k-1}}(\overline{C_k}).$$

Or, pour $j \geqslant 2$, si l'événement $C_1 \cap \cdots \cap C_{j-1}$ est réalisé, i.e. si le candidat est invité à répondre à la j-ième question, alors l'événement C_j est réalisé avec probabilité $\frac{1}{j}$ par hypothèse :

$$\mathbb{P}_{C_1\cap\cdots\cap C_{j-1}}(C_j) = \frac{1}{j}.$$

On a donc pour $k \geqslant 2$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \Big(\prod_{j=2}^{k-1}\frac{1}{j}\Big)\Big(1-\frac{1}{k}\Big) = \frac{1}{(k-1)!}\Big(1-\frac{1}{k}\Big) = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}.$$

Exercice 6

Question 2

Les séries ci-dessous convergent absolument par opérations sur les séries exponentielles, si bien que X admet une espérance donnée par :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=2}^{\infty} k\,\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=2}^{\infty} k\Big(\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}\Big)\\ &= \sum_{k=2}^{\infty}\frac{k-1}{(k-1)!} = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k-2)!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} = \mathbf{e}.\end{aligned}$$

Exercice 8

Question 1

La variable aléatoire N donne le temps d'attente du premier succès (apparition d'un « pile ») lors d'une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre $\frac{1}{2}$. Elle suit donc une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(N = n) = \frac{1}{2}\Big(1-\frac{1}{2}\Big)^{n-1} = \frac{1}{2^n}$$

et admet espérance et variance données par $\mathbb{E}(N) = \mathbb{V}(N) = 2$.

Exercice 8

Question 2.a

Si, pour un entier $n \geqslant 1$ donné, l'événement $[N = n]$ est réalisé, alors la variable X compte le nombre de succès (apparition de « pile ») dans une succession de n épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre $\frac{1}{2}$. La variable X suit donc une loi binomiale $\mathcal{B}\big(n, \frac{1}{2}\big)$ pour la probabilité $\mathbb{P}_{[N=n]}$: elle est à valeurs dans $\mathbb{N}$ avec

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \mathbb{P}_{[N=n]}(X = k) = \binom{n}{k}\Big(\frac{1}{2}\Big)^k\Big(1 - \frac{1}{2}\Big)^{n-k} = \binom{n}{k}\frac{1}{2^n}$$

alors bien sûr que $\mathbb{P}_{[N=n]}(X = k) = 0$ pour $k > n$.

Exercice 8

Question 2.b

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Conditionnellement à l'événement $[N = n]$, la variable X suit la loi $\mathcal{B}\big(n, \frac{1}{2}\big)$ donc admet pour espérance

$$\mathbb{E}\,(X \,|\, N = n) = \frac{n}{2}.$$

Puisque la série ci-dessous (géométrique dérivée de raison appartenant à $]-1, 1[$) converge absolument, la formule de l'espérance totale peut être appliquée au système fondamental associé à la variable N et donne :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(N = n)\,\mathbb{E}\,(X \,|\, N = n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} n\Big(\frac{1}{2}\Big)^{n-1} = \frac{1}{4}\frac{1}{\big(1 - \frac{1}{2}\big)^2} = 1.\end{aligned}$$

Exercice 8

Question 3

La variable X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, la formule des probabilités totales appliquée au système fondamental associé à la variable N donne :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = k) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(N = n)\,\mathbb{P}_{[N=n]}(X = k) = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k}\frac{1}{2^{2n}} \\ &= \frac{1}{4^k k!}\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\Big(\frac{1}{4}\Big)^{n-k} \\ &= \frac{1}{4^k k!}\frac{k!}{\big(1 - \frac{1}{4}\big)^{k+1}} = \frac{4}{3^{k+1}}.\end{aligned}$$

Le cas $k = 0$ doit être traité à part :

$$\mathbb{P}(X = 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{4}\Big)^n - 1 = \frac{1}{3}.$$

Remarque. On peut vérifier que $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1$.

Vu la convergence absolue des séries géométriques dérivées de raison appartenant à $]-1, 1[$, X admet une espérance donnée par :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k\,\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k}{3^{k+1}} = \frac{4}{9}\sum_{k=1}^{\infty} k\Big(\frac{1}{3}\Big)^{k-1} = \frac{4}{9}\frac{1}{\big(1 - \frac{1}{3}\big)^2} = 1.$$

On justifie de même l'existence de :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(X(X+1)\big) &= \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)\,\mathbb{P}(X = k) = \frac{4}{9}\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)k\Big(\frac{1}{3}\Big)^{k-1} \\ &= \frac{4}{9}\frac{2}{\big(1 - \frac{1}{3}\big)^3} = 3\end{aligned}$$

d'où l'on déduit celle de

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}\big(X(X+1)\big) - \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2 = 1.$$

Exercice 10

Question 1

On a $Z_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ où, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, X_j est le numéro de la boule obtenue au j-ième tirage. Par hypothèse, les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ suivent toutes une loi uniforme sur $[\![1, N]\!]$ et sont indépendantes puisque les tirages sont effectués avec remise.

Pour $k \in [\![1, N]\!]$, on a par indépendance de $X_1, \ldots, X_n$:

$$\mathbb{P}(Z_n \leqslant k) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant k, \ldots, X_n \leqslant k) = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}(X_j \leqslant k) = \Big(\frac{k}{N}\Big)^n.$$

La variable aléatoire Z_n étant à valeurs dans $[\![0, N]\!]$, on notera que la formule précédente est encore valable pour $k = 0$. On peut donc écrire, pour $k \in [\![1, N]\!]$:

$$\mathbb{P}(Z_n = k) = \mathbb{P}(Z_n \leqslant k) - \mathbb{P}(Z_n \leqslant k - 1) = \Big(\frac{k}{N}\Big)^n - \Big(\frac{k-1}{N}\Big)^n.$$

Exercice 10

Question 2.a

La variable aléatoire Z_n étant finie, elle admet une espérance donnée par :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z_n) &= \sum_{k=1}^{N} k\,\mathbb{P}(Z_n = k) = \sum_{k=1}^{N} k\Big(\Big(\frac{k}{N}\Big)^n - \Big(\frac{k-1}{N}\Big)^n\Big) \\ &= \frac{1}{N^n}\Big(\sum_{k=1}^{N} k^{n+1} - \sum_{k=2}^{N} k(k-1)^n\Big) = \frac{1}{N^n}\Big(\sum_{k=1}^{N} k^{n+1} - \sum_{k=1}^{N-1}(k+1)k^n\Big) \\ &= \frac{1}{N^n}\Big(N^{n+1} - \sum_{k=1}^{N-1} k^n\Big) = N - \sum_{k=1}^{N-1}\Big(\frac{k}{N}\Big)^n.\end{aligned}$$

Exercice 10

Question 2.b

On a donc $\mathbb{E}(Z_n) = N(1 - S_N)$ où

$$S_N = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1}\Big(\frac{k}{N}\Big)^n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\Big(\frac{k}{N}\Big)^n$$

est une somme de Riemann associée à la fonction $f : x \longmapsto x^n$ sur $[0, 1]$. La fonction f étant continue sur le segment $[0, 1]$, on a par théorème

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}.$$

Il en résulte que

$$\mathbb{E}(Z_n) \sim N\Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big) = \frac{n}{n+1}N, \quad N \to \infty.$$

Exercice 11

Première méthode

On développe :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{E}\big((X - a)^2\big) = \mathbb{E}(X^2 - 2aX + a^2) = \mathbb{E}(X^2) - 2a\,\mathbb{E}(X) + a^2$$

puis on étudie la fonction $a \longmapsto \mathbb{E}\big((X - a)^2\big)$. C'est une fonction polynomiale du second degré qui atteint son minimum pour $a = \mathbb{E}(X)$, égal à

$$\mathbb{E}\big[\big(X - \mathbb{E}(X)\big)^2\big] = \mathbb{V}(X).$$

Deuxième méthode

Le résultat peut être démontré directement : en posant $m = \mathbb{E}(X)$ il vient, pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(X-a)^2 &= \big((X-m)+(m-a)\big)^2 \\ &= (X-m)^2 + 2(X-m)(m-a) + (m-a)^2\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big((X-a)^2\big) &= \mathbb{E}\big((X-m)^2\big) + 2(m-a)\,\mathbb{E}(X-m) + (m-a)^2 \\ &= \mathbb{V}(X) + (m-a)^2\end{aligned}$$

car $\mathbb{E}(X-m) = \mathbb{E}(X) - m = 0$. Il est alors clair que la fonction est minimale pour $a = m$ c'est-à-dire $a = \mathbb{E}(X)$, de valeur $\mathbb{V}(X)$.

Exercice 12

Question 1.a

Chacune des variables X_1 et X_2 donne le temps d'attente du premier succès (obtenir un 6) dans une suite d'expériences de Bernoulli indépendantes de même paramètre $p = \frac{1}{6}$, et suit donc à ce titre une loi géométrique de paramètre p.

Exercice 12

Question 1.b

Pour $k = 0$ tout d'abord, on a $\mathbb{P}(X_i \leqslant k) = 0$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\mathbb{P}(X_i \leqslant k) = \sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}(X_i = j) = \sum_{j=1}^{k} pq^{j-1} = p\frac{1-q^k}{1-q} = 1 - q^k$$

où l'on a posé $q = 1 - p = \frac{5}{6}$. On peut remarquer que cette formule est encore valable pour $k = 0$.

Exercice 12

Question 2.a

On a $X = \max(X_1, X_2)$ donc, pour $k \in \mathbb{N}$, l'événement $[X \leqslant k]$ est réalisé si, et seulement si, $X_i \leqslant k$ pour tout $i \in \{1, 2\}$. En d'autres termes,

$$[X \leqslant k] = [X_1 \leqslant k] \cap [X_2 \leqslant k]$$

d'où :

$$\mathbb{P}(X \leqslant k) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant k, X_2 \leqslant k) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant k)\,\mathbb{P}(X_2 \leqslant k)$$

par indépendance de X_1 et X_2. Ainsi, d'après **1.b.**,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X \leqslant k) = (1 - q^k)^2.$$

Exercice 12

Question 2.b

La variable X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ avec, pour $k \in \mathbb{N}^*$, l'union disjointe

$$[X \leqslant k-1] \cup [X = k] = [X \leqslant k]$$

d'où l'on déduit que

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \leqslant k) - \mathbb{P}(X \leqslant k-1).$$

Dès lors, vu la question **1.b.** (même si $k = 1$) :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = k) &= (1-q^k)^2 - (1-q^{k-1})^2 = (q^{k-1} - q^k)(2 - q^k - q^{k-1}) \\ &= pq^{k-1}(2 - q^k - q^{k-1}) = 2pq^{k-1} - pq^{2k-1} - pq^{2k-2}.\end{aligned}$$

Exercice 12

Question 2.c

La variable X admet une espérance car la série ci-dessous est absolument convergente, par opérations sur les séries géométriques dérivées, toutes absolument convergentes car de raison appartenant à $]-1, 1[$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{\infty} k\,\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k\big(2pq^{k-1} - pq^{2k-1} - pq^{2k-2}\big) \\ &= 2p\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} - p(q+1)\sum_{k=1}^{\infty} k(q^2)^{k-1} \\ &= \frac{2p}{(1-q)^2} - \frac{p(q+1)}{(1-q^2)^2} = \frac{96}{11} \simeq 8{,}7.\end{aligned}$$

Exercice 17

Question 1

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné, la variable aléatoire X est presque sûrement finie (ne prend que les valeurs $-n$ et n) conditionnellement à A_n et admet donc à ce titre une espérance pour la probabilité $\mathbb{P}_{A_n}$:

$$\mathbb{E}\,(X \,|\, A_n) = n\,\mathbb{P}_{A_n}(X = n) - n\,\mathbb{P}_{A_n}(X = -n).$$

Puis, étant donné que $[X = n] \subset A_n$,

$$\mathbb{P}_{A_n}(X = n) = \frac{\mathbb{P}([X = n] \cap A_n)}{\mathbb{P}(A_n)} = \frac{P(X = n)}{\mathbb{P}(X = n) + \mathbb{P}(X = -n)} = \frac{1}{2}$$

et de même $\mathbb{P}_{A_n}(X = -n) = \frac{1}{2}$.
On en déduit la valeur de $\mathbb{E}\,(X \,|\, A_n) = 0$ et il en découle la convergence évidente de la série $\sum_{n \geqslant 1} \mathbb{P}(A_n)\,\mathbb{E}\,(X \,|\, A_n)$.

Exercice 17

Question 2

Il s'agit d'examiner la convergence de la série positive

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |n|\,\mathbb{P}(X = n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |n|\,\frac{1}{|n|\,(|n|+1)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{|n|+1}, \qquad (*)$$

qui est divergente par comparaison à la série harmonique :

$$\frac{1}{|n|+1} \sim \frac{1}{n} \geqslant 0, \quad n \to \infty.$$

La variable aléatoire X n'admet donc pas d'espérance.

Remarque. L'argument précédent établit en fait la divergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} u_n$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{Z}^*, \quad u_n = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{si } n \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

La divergence de la série $(*)$ s'en déduit car :

$$\forall n \in \mathbb{Z}^*, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{|n|+1}.$$

Exercice 18

On décompose l'événement considéré :

$$[X = Y] = \bigcup_{k=0}^{n} [X = k] \cap [Y = k]$$

où l'union est disjointe. Il en résulte, par indépendance de X et Y :

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k, Y = k) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k)\,\mathbb{P}(Y = k)$$

et donc :

$$\mathbb{P}(X = Y) = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$

On conclut en utilisant la formule de Vandermonde (hors-programme mais très classique) : pour $a, b \in \mathbb{N}$,

$$\forall n \in [\![0, a+b]\!], \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$$

qu'on peut établir par un raisonnement combinatoire. Soit en effet E un ensemble de cardinal $a+b$. On considère une partie A de E de cardinal a et on note B son complémentaire, de cardinal b.
Pour $n \in [\![0, a+b]\!]$ donné, le coefficient binomial $\binom{a+b}{n}$ représente le nombre de parties de E à n éléments. L'ensemble $\mathcal{P}_n(E)$ de ces parties peut être décomposé en l'union disjointe suivante :

$$\mathcal{P}_n(E) = \bigcup_{k=0}^{n} \{X \in \mathcal{P}_n(E) : \mathrm{Card}(X \cap A) = k\}.$$

Puis, pour $k \in [\![0, n]\!]$ donné, choisir une partie de E de cardinal n formée d'exactement k éléments de A revient à choisir les k éléments qui la composent issus de A (ce qui représente $\binom{a}{k}$ possibilités) puis les $n-k$ éléments de B qui viennent s'y ajouter (ce qui représente $\binom{b}{n-k}$ possibilités). Il y a donc $\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$ telles parties, ce qui achève la démonstration.

En appliquant la formule de Vandermonde à $a = b = n$, on obtient la formule :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

qui permet d'achever l'exercice :

$$\mathbb{P}(X = Y) = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}.$$

Exercice 19

Question 1

Pour commencer, on calcule

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X > k) = 1 - \mathbb{P}(X \leqslant k) = 1 - \sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}(X = j)$$
$$= 1 - \sum_{j=1}^{k} pq^{j-1} = 1 - p\frac{1-q^k}{1-q} = q^k$$

où l'on a posé $q = 1 - p$.

Pour $n, h \in \mathbb{N}^*$, on a donc, étant donné que $[X > n+h] \subset [X > n]$:

$$\mathbb{P}_{[X>n]}(X > n+h) = \frac{\mathbb{P}(X > n+h)}{\mathbb{P}(X > n)} = \frac{q^{n+h}}{q^n} = q^h = \mathbb{P}(X > h).$$

Exercice 19

Question 2.a

Pour $n, h \in \mathbb{N}^*$, on a par hypothèse :

$$\mathbb{P}_{[X>n]}(X > n+h) = \frac{\mathbb{P}(X > n+h)}{\mathbb{P}(X > n)} = \mathbb{P}(X > h)$$

d'où, pour $h = 1$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X > n+1) = \mathbb{P}(X > 1)\,\mathbb{P}(X > n) = q\,\mathbb{P}(X > n)$$

et la suite $\big(\mathbb{P}(X > n)\big)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc géométrique de raison $q = \mathbb{P}(X > 1)$.

Exercice 19

Question 2.b

Il résulte de la question **a.** que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X > n) = q^{n-1}\,\mathbb{P}(X > 1) = q^n.$$

On note que la formule précédente est encore valable pour $n = 0$ puisque X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ par hypothèse.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$, l'union disjointe

$$[X > n-1] = [X = n] \cup [X > n]$$

donne alors (même pour $n = 1$) :

$$\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X > n-1) - \mathbb{P}(X > n) = q^{n-1} - q^n = (1-q)q^{n-1} = pq^{n-1}$$

où $p = 1 - q$. La variable X suit donc la loi géométrique de paramètre p.

Exercice 24

Question 1.a

La variable X_1 donne le temps d'attente du premier succès dans une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre p. Elle suit donc une loi géométrique de paramètre p : elle est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ avec :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = k) = pq^{k-1}$$

où l'on a noté $q = 1 - p$, et admet espérance et variance données par :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{q}{p^2}.$$

Exercice 24

Question 1.b

Le r-ième succès ne peut advenir avant la r-ième épreuve. La variable X_r est donc à valeurs dans $[\![r, +\infty[\![$. On verra réciproquement dans la question suivante que toutes ces valeurs peuvent être prises par X_r.

Exercice 24

Question 1.c

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note S_k l'événement « la k-ième épreuve est un succès ».

Pour $k \geqslant r$ donné, l'événement $[X_r = k]$ se produit si, et seulement si, la k-ième épreuve est un succès et, parmi les $k-1$ précédentes, $r-1$ sont des succès et les $k-1-(r-1) = k-r$ autres sont des échecs.
L'événement $[X_r = k]$ s'écrit donc comme l'union disjointe des événements

$$A_I = \Big(\bigcap_{\substack{1 \leqslant i \leqslant k-1 \\ i \in I}} S_i\Big) \cap \Big(\bigcap_{\substack{1 \leqslant i \leqslant k-1 \\ i \notin I}} \overline{S_i}\Big) \cap S_r, \qquad (*)$$

où I parcourt l'ensemble des parties de $[\![1, k-1]\!]$ de cardinal $r-1$. Par indépendance des événements S_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, chacun des événements $(*)$ a pour probabilité $\mathbb{P}(A_I) = p^r q^{k-r}$. D'où finalement l'expression de :

$$\mathbb{P}(X_r = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r}.$$

Exercice 24

Question 2.a

Un changement d'indice donne, vu la somme d'une série géométrique dérivée :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=r}^{\infty} \mathbb{P}(X_r = k) &= \sum_{k=r}^{\infty} \frac{(k-1)(k-2)\cdots(k-r+1)}{(r-1)!} p^r q^{k-r} \\
&= \frac{p^r}{(r-1)!} \sum_{k=r-1}^{\infty} k(k-1)\cdots\big(k-(r-1)+1\big) q^{k-(r-1)} \\
&= \frac{p^r}{(r-1)!} \frac{(r-1)!}{(1-q)^r} = 1.
\end{aligned}$$

Ainsi la variable X_r est bien définie sur un événement de probabilité 1, ce qui légitime sa définition. En d'autres termes, l'événement « le r-ième pile ne se produit jamais », sur lequel X_r n'est pas définie, est négligeable.

Exercice 24

Question 2.b

La série ci-dessous converge absolument comme série géométrique de raison $q \in]-1, 1[$, ce qui établit l'existence de $\mathbb{E}(X)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) = \sum_{k=r}^{\infty} k\,\mathbb{P}(X_r = k) &= \frac{p^r}{(r-1)!} \sum_{k=r}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-r+1) q^{k-r} \\
&= \frac{p^r}{(r-1)!} \frac{r!}{(1-q)^{r+1}} = \frac{r}{p}.
\end{aligned}$$

Exercice 24

Question 2.c

On calcule comme précédemment, d'après le théorème de transfert,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big(X_r(X_r+1)\big) &= \sum_{k=r}^{\infty} (k+1)k\,\mathbb{P}(X_r = k) \\
&= \frac{p^r}{(r-1)!} \sum_{k=r}^{\infty} (k+1)k\cdots(k-r+1) q^{k-r} \\
&= \frac{p^r}{(r-1)!} \sum_{k=r+1}^{\infty} k(k-1)\cdots\big(k-(r+1)+1\big) q^{k-(r+1)} \\
&= \frac{p^r}{(r-1)!} \frac{(r+1)!}{(1-q)^{r+2}} = \frac{r(r+1)}{p^2}.
\end{aligned}$$

On en déduit l'existence et la valeur de

$$\mathbb{V}(X_r) = \mathbb{E}(X_r^2) - \mathbb{E}(X_r)^2 = \mathbb{E}\big(X_r(X_r+1)\big) - \mathbb{E}(X_r) - \mathbb{E}(X_r)^2 = \frac{rq}{p^2}.$$

Exercice 24

Question 3.a

Par définition, on a $r + Y_r = X_r$, d'où $Y_r = X_r - r$.

Exercice 24

Question 3.b

On déduit immédiatement des questions précédentes que Y_r est à valeurs dans $\mathbb{N}$ avec :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(Y_r = k) = \mathbb{P}(X_r = r+k) = \binom{r+k-1}{r-1} p^r q^k,$$

qu'elle admet espérance et variance données par :

$$\mathbb{E}(Y_r) = \mathbb{E}(X_r) - r = \frac{rq}{p} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(Y_r) = \mathbb{V}(X_r) = \frac{rq}{p^2}.$$

Exercice 24

Question 3.c

Pour $k \in \mathbb{N}$, on obtient en inversant l'ordre des facteurs :

$$\begin{aligned}
\binom{k+r-1}{k} &= \frac{(k+r-1)(k+r-2)\cdots(r+1)r}{k!} = \frac{r(r+1)\cdots(k+r-1)}{k!} \\
&= (-1)^k \frac{(-r)(-r-1)\cdots(-r-k+1)}{k!} = (-1)^k \binom{-r}{k}.
\end{aligned}$$

On en déduit immédiatement que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(Y_r = k) = \binom{-r}{k} p^r (-q)^k.$$

Exercice 26

Question 1

Il vient, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k\,\mathbb{P}(X = k) &= \sum_{k=1}^{n} k\big(\mathbb{P}(X > k-1) - \mathbb{P}(X > k)\big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\,\mathbb{P}(X > k-1) - \sum_{k=1}^{n} k\,\mathbb{P}(X > k) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\,\mathbb{P}(X > k) - \sum_{k=0}^{n} k\,\mathbb{P}(X > k) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \big((k+1) - k\big)\,\mathbb{P}(X > k) - n\,\mathbb{P}(X > n) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X > k) - (n+1)\,\mathbb{P}(X > n),
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Exercice 26

Question 2

On raisonne par double implication.

- On suppose dans un premier temps que la série $\sum_k \mathbb{P}(X > k)$ converge. On a dans ce cas, d'après **1.**,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^{n} k\,\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X > k) - (n+1)\,\mathbb{P}(X > n)$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X > k) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > k).$$

Ainsi les sommes partielles de la série $\sum_k k\,\mathbb{P}(X = k)$ sont majorées, et comme cette série est à termes positifs, cela suffit pour assurer sa convergence et donc sa convergence absolue : la variable X admet une espérance.

- Réciproquement, on suppose que X admet une espérance.

On note pour commencer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)\,\mathbb{P}(X > n) = (n+1) \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{P}(X = k)$$
$$\leqslant \sum_{k=n+1} k\,\mathbb{P}(X = k) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

car la convergence de la série $\sum_k \mathbb{P}(X = k)$ entraîne celle de son reste vers 0. Il en résulte par encadrement que

$$\lim_{n\to\infty} (n+1)\,\mathbb{P}(X > n) = 0.$$

Il ressort alors de la formule obtenue en **1.** que la série $\sum_k \mathbb{P}(X > k)$ converge avec :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > k) = \sum_{k=0}^{\infty} k\,\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{E}(X),$$

ce qui achève la démonstration.

Exercice 26

Question 3.a

Pour $n \geqslant 1$ donné, l'événement A « la collection n'est pas complète après n achats » est réalisé si, et seulement si, l'un des paquets n'est jamais obtenu au cours des n achats. En d'autres termes, $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$. D'après la formule du crible de Poincaré,

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{1\leqslant i\leqslant 4} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} \mathbb{P}(A_i \cap A_j)$$
$$+ \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant 4} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4).$$

L'événement $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$ est clairement impossible et, pour des raisons de symétrie, la formule précédente devient donc :

$$\mathbb{P}(A) = 4\,\mathbb{P}(A_1) - 6\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + 4\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

L'événement A_1 est réalisé si, et seulement si, chacun des n paquets contient l'un des autocollants 2, 3 ou 4. Vu l'indépendance des achats, on a donc

$$\mathbb{P}(A_1) = \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

et on justifierait de même que

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

La formule précédente devient alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = 4\left(\frac{3}{4}\right)^n - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4\left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

Exercice 26

Question 3.b

L'événement $[X > n]$ est réalisé si, et seulement si, la collection n'est pas complète après les n premiers achats. On a donc $\mathbb{P}(X > n) = p_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On a de plus $\mathbb{P}(X > 0) = 1$ car X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

Exercice 26

Question 3.c

La série $\sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(X > n) = \sum_{n\geqslant 1} p_n$ est convergente par opérations sur les séries géométriques convergentes, de raison appartenant à $]-1, 1[$. D'après la question **2.**, la variable X admet donc une espérance égale à :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > n) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n$$
$$= 1 + 4\frac{3}{4}\frac{1}{1-\frac{3}{4}} - 6\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} + 4\frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{25}{3}.$$

Exercice 28

Question 1

Soit $n \geqslant 1$. Conditionnellement à l'événement $[N = n]$, on a $X = X_1 + \cdots + X_n$ presque sûrement. Comme chacune des variables X_i admet une espérance (pour $\mathbb{P}$), elle admet une espérance conditionnellement à $[N = n]$ et alors, par linéarité de l'espérance (pour $\mathbb{P}_{[N=n]}$) :

$$\mathbb{E}(X \mid N = n) = \mathbb{E}(X_1 + \cdots + X_n \mid N = n)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k \mid N = n) = n\,\mathbb{E}(X_1)$$

puisque les variables $X_1, \ldots, X_n$ ont même loi et sont indépendantes de N.

Conditionnellement à l'événement $[N = 0]$, on a $X = 0$ si bien que $\mathbb{E}(X \mid N = 0) = 0$.

Exercice 28

Question 2

D'après la formule de l'espérance totale appliquée au système complet associé à N, il vient :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N = n)\,\mathbb{E}(X \mid N = n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(N = n)\,n\,\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(N)\,\mathbb{E}(X_1)$$

où la convergence absolue de la série précédente résulte de l'existence de $\mathbb{E}(N)$.