

Devoir libre 2 (facultatif)

À rendre lundi 10 septembre 2018

On note \mathbf{E} l'ensemble des fonctions f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} pour lesquelles il existe une suite réelle $s = (s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, dite *adaptée à f* , telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x + \frac{k}{n}\right) = s_n f(nx) \quad (1)$$

L'ensemble des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} est noté $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Les polynômes considérés sont à coefficients réels, et tout polynôme P sera confondu avec la fonction polynomiale, élément de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, qui lui est naturellement associée.

Pour tout entier naturel p non nul, et toute fonction p fois dérivable f , de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , la dérivée p -ième de la fonction f est notée $f^{(p)}$ (la dérivée première de f est aussi notée f').

On rappelle que, T étant un réel non nul, une fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} est dite T -périodique lorsque :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x + T) = f(x)$$

L'objet du problème est de déterminer certaines des fonctions f satisfaisant l'équation (1).

Partie I Résultats généraux et exemples d'éléments de \mathbf{E}

- 1) Soit f une fonction appartenant à \mathbf{E} , autre que la fonction nulle. Montrer qu'il existe une *unique* suite $s = (s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ adaptée à f , et que $s_1 = 1$.
- 2) Montrer que si f est une fonction dérivable appartenant à \mathbf{E} , alors la dérivée f' de f appartient à \mathbf{E} .
- 3) Montrer que les fonctions constantes appartiennent à \mathbf{E} .
- 4) Soit A la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui à x associe $x - \frac{1}{2}$. Établir que A est élément de \mathbf{E} .
- 5) \mathbf{E} constitue-t-il un sous-espace vectoriel du \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?
- 6) Soit χ la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

Pour tout entier naturel non nul n et tout réel x , déterminer, en distinguant les cas $nx \in \mathbb{Z}$ et $nx \notin \mathbb{Z}$, la valeur de la somme $\sum_{k=0}^{n-1} \chi\left(x + \frac{k}{n}\right)$.

En déduire que χ appartient à \mathbf{E} , la suite adaptée étant constante, égale à 1.

- 7) a) Pour tout réel x et tous entiers naturels non nuls p et n , calculer $\sum_{k=0}^{n-1} e^{2ip\pi\left(x + \frac{k}{n}\right)}$, et en déduire que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(2p\pi\left(x + \frac{k}{n}\right)\right) = \begin{cases} n \cos(2p\pi x) & \text{si } p \text{ est multiple de } n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- b) Soit u la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui à x associe $\cos(2\pi x)$. Montrer que u appartient à \mathbf{E} , et préciser la suite adaptée à u .
- c) Justifier, pour tout réel x , la convergence de la série de terme général $\frac{1}{2^q} \cos(2^{q+1}\pi x)$.

Soit alors v la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui à x associe $\sum_{q=0}^{+\infty} \frac{1}{2^q} \cos(2^{q+1}\pi x)$. Montrer que v appartient à \mathbf{E} , et préciser la suite adaptée à v .

Partie II Recherche des polynômes éléments de E

- 1) a) Montrer que si P est un polynôme de degré 1 élément de E , alors la suite adaptée au polynôme P est constante, égale à 1.
 b) Quels sont les polynômes de degré 1 appartenant à E ?
- 2) On suppose dans cette question que P est un polynôme non nul élément de E , et on note p le degré de P .
 a) Montrer que la suite adaptée à P est la suite $s = (s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, s_n = \frac{1}{n^{p-1}}$.
 b) Montrer que, si p est au moins égal à 1, on a l'égalité : $\int_0^1 P(t) dt = 0$.
- 3) Établir que, pour tout polynôme Q , il existe un unique polynôme P tel que $P' = Q$ et $\int_0^1 P(t) dt = 0$.

On peut donc définir une suite $(B_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de polynômes de la manière suivante :

$$B_0 = 1$$

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, B'_p = pB_{p-1} \quad \text{et} \quad \int_0^1 B_p(t) dt = 0$$

- 4) a) Déterminer, pour chaque entier naturel p , le degré et le coefficient dominant de B_p .
 b) Vérifier, pour tout réel x , l'égalité : $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$, puis calculer $B_2(x)$ pour tout réel x .
- 5) On a déjà vu dans la partie I que B_0 et B_1 sont des éléments de E . Vérifier que B_2 est élément de E .
- 6) Soit p un entier naturel non nul. On suppose que B_{p-1} est élément de E et on veut montrer que B_p est élément de E .
 Pour cela, on fixe un entier naturel non nul n et on pose, pour tout réel x :

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n-1} B_p(x + \frac{k}{n}) \quad \text{et} \quad \psi(x) = \frac{1}{n^{p-1}} B_p(nx)$$

- a) Montrer que la fonction $\varphi - \psi$ est constante.
- b) Calculer $\int_0^{1/n} \varphi(x) dx$ et $\int_0^{1/n} \psi(x) dx$.
- c) Établir que $\varphi - \psi = 0$ et conclure.
- 7) Dédire des questions précédentes que, pour tout entier naturel p , les polynômes de degré p qui appartiennent à E sont exactement les polynômes λB_p obtenus lorsque λ décrit \mathbb{R}^* .

Partie III Étude des fonctions indéfiniment dérivables de E

- 1) Soit δ la fonction de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans lui-même qui, à toute fonction φ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , associe la fonction $\delta(\varphi)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \delta(\varphi)(x) = \varphi(x + 1) - \varphi(x)$$

- a) Montrer que δ est linéaire. Quelle propriété caractérise les éléments de son noyau ?
- b) Vérifier que, lorsque P est une fonction polynomiale, il en est de même de $\delta(P)$, puis préciser le degré et le coefficient dominant de $\delta(P)$ lorsque P est de degré p supérieur ou égal à 1.
- 2) Montrer que, si f est une fonction élément de E , de suite adaptée $s = (s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, s_n \delta(f)(nx) = \delta(f)(x) \quad (2)$$

- 3) Soit g une fonction de classe C^∞ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On suppose qu'il existe un réel α tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \alpha g(2x) = g(x) \quad (3)$$

- a) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}, \alpha^k g(x) = g(\frac{x}{2^k}) \quad (4)$$

- b) Montrer que si $\alpha = 0$, alors g est nulle.
- c) Montrer que si $|\alpha| > 1$, alors g est nulle.
- d) On suppose $0 < |\alpha| \leq 1$. Justifier l'existence d'un entier naturel p et d'un réel β tels que :

$$|\beta| > 1 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \beta g^{(p)}(2x) = g^{(p)}(x)$$

- e) En déduire que, dans tous les cas, g est polynomiale.

- 4) Dans cette question, on suppose que f est une fonction de classe C^∞ élément de \mathbf{E} , de suite adaptée $s = (s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, et que $\delta(f)$ n'est pas la fonction nulle.
- a) Montrer que $\delta(f)$ est une fonction polynomiale non nulle; on note q son degré.
- b) À l'aide de (2), montrer que pour tout entier naturel non nul n , on a :
- $$s_n = \frac{1}{n^q}$$
- puis montrer qu'il existe un réel non nul a tel que :
- $$\forall x \in \mathbb{R}, \delta(f)(x) = ax^q$$
- c) Pour chaque entier naturel non nul p , montrer, en appliquant ce dernier résultat à la fonction polynomiale B_p introduite dans la partie II, qu'on a :
- $$\forall x \in \mathbb{R}, \delta(B_p)(x) = px^{p-1}$$
- d) Montrer qu'il existe un réel λ non nul et un entier p non nul tels que la fonction $\delta(f - \lambda B_p)$ soit nulle. Établir alors que la fonction $h = f - \lambda B_p$ est une fonction 1-périodique, de classe C^∞ et élément de \mathbf{E} , et en préciser une suite adaptée.

Partie IV Étude des fonctions indéfiniment dérivables et 1-périodiques de \mathbf{E}

- 1) Dans cette question préliminaire, on suppose que g est une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , continue et 1-périodique, telle que, pour tout réel x , $g(nx)$ tend vers 0 lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.
- a) Montrer que, pour tout entier naturel k , on a l'égalité : $g(k) = 0$.
- b) Montrer que $g\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Plus généralement, montrer que, pour tout entier relatif p et tout entier naturel non nul q , on a l'égalité : $g\left(\frac{p}{q}\right) = 0$.
- c) En déduire que g est la fonction nulle.

Dans toute la suite de cette partie, on suppose que f est une fonction de classe C^∞ et 1-périodique, élément de \mathbf{E} , de suite adaptée $s = (s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

- 2) a) Montrer que l'application qui à tout réel x associe $\int_x^{x+1} f(t) dt$ est constante.
- b) Pour tout réel x , montrer que $\frac{s_n}{n} f(nx)$ tend vers $\int_0^1 f(t) dt$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.
- 3) On suppose dans cette question que $\frac{|s_n|}{n}$ tend vers $+\infty$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$. Montrer, à l'aide de la question 1), que f est la fonction nulle.
- 4) Dans cette question, on suppose plus généralement qu'il existe un entier naturel k tel que $n^k |s_n|$ tend vers $+\infty$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.
- a) Montrer, en considérant une dérivée d'ordre suffisant de f , que f est polynomiale.
- b) Montrer que f est constante.
- 5) À l'aide du résultat final de la partie III, montrer que les fonctions de classe C^∞ appartenant à \mathbf{E} et qui ne sont pas 1-périodiques sont exactement les fonctions polynomiales du type λB_p , obtenues lorsque p décrit \mathbb{N}^* et λ décrit \mathbb{R}^* .

