Devoir libre 1

À rendre lundi 3 septembre 2018

Premier exercice

Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes entre elles. Elles font appel à différents points du cours d'analyse de première année, auquel on se réfèrera en cas de besoin. Les réponses apportées devront être aussi précises que possible ; en particulier, on utilisera *à bon escient* les notions de limite, d'équivalent et de développement limité.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\mathbf{e}^x - \mathbf{e}^{-x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

a. Justifier que f est continue en 0.

b. Justifier que f est dérivable en 0. Que vaut $a = f'(0)$?

c. Déterminer un équivalent de $f(x) - ax$ lorsque $x \to 0$. Préciser la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f par rapport à sa tangente $\mathcal{T}$ au point d'abscisse 0. Indiquer sur une figure l'allure de la courbe $\mathcal{C}$ au voisinage de l'origine.

d. Déduire des questions précédentes un développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.

2. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n.$$

a. Montrer que :

$$u_{n+1} - u_n \sim -\frac{1}{2n^2}, \qquad n \to \infty.$$

b. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et en déduire l'existence d'une constante réelle γ (appelée constante d'Euler) telle que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1), \qquad n \to \infty.$$

3. a. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

b. En déduire, grâce au changement de variable $u = 1/t$, la valeur de l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_{1/2}^{2} \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \arctan t \,\mathrm{d}t.$$

4. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}_+$.

a. On suppose $\ell > 0$. Justifier l'existence d'un réel a tel que pour tout $x \geqslant a$, $f'(x) \geqslant \ell/2$.

b. En déduire que si $\ell > 0$, alors $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque $x \to +\infty$.

c. En examinant des exemples issus des fonctions usuelles, montrer que dans le cas où $\ell = 0$, chacune des situations suivantes peut se présenter : $f(x)$ peut admettre une limite quelconque, réelle ou infinie, lorsque $x \to +\infty$, ou ne pas admettre de limite.

Deuxième exercice

Ariane débute au jeu de fléchettes ; elle effectue des lancers successifs d'une fléchette. Au premier lancer, elle a une chance sur deux d'atteindre la cible. Pour les lancers suivants,

- la probabilité qu'Ariane atteigne la cible est de $\frac{1}{3}$ si elle l'a déjà atteinte au lancer précédent ;
- la probabilité de manquer la cible est de $\frac{4}{5}$ si elle l'a déjà manquée lors du lancer précédent.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'événement A_n : « Ariane atteint la cible lors du n-ième lancer » et on note p_n sa probabilité.

1. **a.** Calculer p_1 et justifier que $p_2 = \frac{4}{15}$.
   b. Démontrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_{n+1} = \frac{2}{15} p_n + \frac{1}{5}.$$
   c. En déduire une expression de p_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

On note T la variable aléatoire donnant le numéro du premier lancer atteignant la cible, en convenant que $\mathrm{T} = 0$ si aucun lancer n'atteint la cible.

2. **a.** Calculer $\mathbb{P}(\mathrm{T} = k)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.
   b. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(\mathrm{T} = 0)$.
3. Justifier que T admet une espérance que l'on calculera.
4. Calculer $\mathbb{E}\big(\mathrm{T}(\mathrm{T}-1)\big)$ et en déduire la variance de T.
5. Écrire un script Scilab demandant à l'utilisateur d'entrer un entier naturel `n` puis simulant et affichant le résultat des n premiers lancers.
   On rappelle que l'instruction `grand(1,1,'bin',1,p)` renvoie `0` ou `1` selon la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.

Problème

Ce problème introduit de nouveaux objets. Il est important de prendre un temps de réflexion lors de leur définition pour être capable de les manipuler par la suite. De même, de nombreuses questions s'appuient (sans que l'énoncé ne le mentionne explicitement) sur les résultats des questions précédentes. Il est donc important d'être attentif au résultat démontré dans chaque question pour avoir à l'esprit, à mesure qu'on progresse dans le problème, une idée assez précise des résultats déjà démontrés afin de penser à les utiliser.

On définit la fonction *exponentielle complexe* $\exp_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ en posant, pour tout $z \in \mathbb{C}$,
$$\exp_{\mathbb{C}} z = \mathbf{e}^x \mathbf{e}^{\mathbf{i}y} = \mathbf{e}^x(\cos y + \mathbf{i} \sin y)$$
où $z = x + \mathbf{i}y$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. (Dans la formule précédente, $\mathbf{e}^x$ désigne l'image du réel x par la fonction exponentielle classique et $\mathbf{e}^{\mathbf{i}y} = \cos y + \mathbf{i} \sin y$.)
On constate que pour $x \in \mathbb{R}$, $\exp_{\mathbb{C}} x = \mathbf{e}^x$ et pour $y \in \mathbb{R}$, $\exp_{\mathbb{C}}(\mathbf{i}y) = \mathbf{e}^{\mathbf{i}y}$.
On s'autorisera donc dans la suite à écrire $\exp_{\mathbb{C}} z = \exp z = \mathbf{e}^z$ (sans qu'il n'y ait de risque de confusion).

1. **a.** Pour $z \in \mathbb{C}$, identifier le module et l'argument du complexe $\mathbf{e}^z$ en fonction de $\Re\mathrm{e}\, z$ et $\Im\mathrm{m}\, z$; en déduire que $\mathbf{e}^z \neq 0$.
   b. Montrer que :
$$\forall z, w \in \mathbb{C}, \quad \mathbf{e}^{z+w} = \mathbf{e}^z \mathbf{e}^w.$$
   c. Prouver que :
$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad \Big(\mathbf{e}^z = 1 \iff z \in 2\mathbf{i}\pi\mathbb{Z}\Big).$$

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on définit le *cosinus hyperbolique* de z, noté $\operatorname{ch} z$, et le *sinus hyperbolique* de z, noté $\operatorname{sh} z$, par :
$$\operatorname{ch} z = \frac{\mathbf{e}^z + \mathbf{e}^{-z}}{2} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{sh} z = \frac{\mathbf{e}^z - \mathbf{e}^{-z}}{2}.$$

2. **a.** Montrer que :
$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1.$$
   b. Montrer que :
$$\forall z, w \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{ch}(z+w) = \operatorname{ch} z \operatorname{ch} w + \operatorname{sh} z \operatorname{sh} w.$$
   c. Que valent $\operatorname{ch}(\mathbf{i}x)$ et $\operatorname{sh}(\mathbf{i}x)$ pour $x \in \mathbb{R}$?

On considère la suite $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des *polynômes de Tchebychev* définie par :
$$\mathrm{T}_0 = 1, \quad \mathrm{T}_1 = \mathrm{X} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{T}_{n+2} = 2\mathrm{X}\mathrm{T}_{n+1} - \mathrm{T}_n.$$

3. **a.** Calculer T_2 et T_3.
   b. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad \mathrm{T}_n(\operatorname{ch} z) = \operatorname{ch}(nz).$$
   c. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est de degré n et préciser son coefficient dominant.

d. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{T}_n(-\mathrm{X}) = (-1)^n \mathrm{T}_n(\mathrm{X})$.

4. a. Déduire des questions précédentes que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{T}_n(\cos\theta) = \cos(n\theta).$$

b. À l'aide de la formule du binôme de Newton et des formules d'Euler, en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{T}_n(\cos\theta) = \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \binom{n}{2k} (\cos^2\theta - 1)^k \cos^{n-2k}\theta.$$

c. Justifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{T}_n = \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \binom{n}{2k} (\mathrm{X}^2 - 1)^k \mathrm{X}^{n-2k}.$$

5. a. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [-1, 1], \quad \mathrm{T}_n(x) = \frac{1}{2}\Big(\big(x + \mathbf{i}\sqrt{1 - x^2}\big)^n + \big(x - \mathbf{i}\sqrt{1 - x^2}\big)^n\Big).$$

b. Justifier que la fonction ch définit une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$. On note argch : $[1, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ la bijection réciproque. Vérifier que pour tout $y \geqslant 1$, $\operatorname{argch} y = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$.

c. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \geqslant 1$, $\mathrm{T}_n(x) = \operatorname{ch}(n \operatorname{argch} x)$. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \geqslant 1, \quad \mathrm{T}_n(x) = \frac{1}{2}\Big(\big(x + \sqrt{x^2 - 1}\big)^n + \big(x - \sqrt{x^2 - 1}\big)^n\Big).$$

d. Montrer que la formule précédente est encore valable pour $x \leqslant -1$.